

A New Beginning Programme for Students by MASTERMIND

प्रश्नावली 1 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. **भाज्य** : संख्या 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ जो स्वयं के अतिरिक्त अन्य दूसरी संख्याओं से भी विभाजित हो, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

अभाज्य : संख्या 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ जो और स्वयं को छोड़कर किसी भी संख्या से विभाजित नहीं होती हों, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

2. कोई भी धनात्मक पूर्णांक p अभाज्य होता है यदि $p \neq 1$ है तथा p के धनात्मक भाजक केवल 1 और p हैं। उदाहरणार्थ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19 और 23 कुछ अभाज्य संख्याएँ हैं। हमें ज्ञात है कि 1 के अतिरिक्त प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक या तो अभाज्य है अथवा भाज्य है। यदि कोई दिया गया धनात्मक पूर्णांक एक भाज्य संख्या है, तो इसको इसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। प्रत्येक गुणनखण्ड या तो एक अभाज्य पूर्णांक होगा या एक भाज्य पूर्णांक होगा। यदि कोई गुणनखण्ड एक भाज्य पूर्णांक है, तो उसके आगे भी गुणनखण्ड किए जा सकते हैं और यदि हम बार-बार गुणनखण्ड करते जाते हैं, तो अन्ततः उस स्थिति में पहुँच जाते हैं, जहाँ सभी गुणनखण्ड अभाज्य संख्याएँ होंगी।

गुणनखण्ड वृक्ष : गुणनखण्डों की एक शृंखला, जो एक वृक्ष के रूप को निरूपित करती है, गुणनखण्ड वृक्ष कहलाती है। उदाहरणार्थ—

∴ हम 32 को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

जहाँ, 32 अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में है।

इससे हम यह अनुमान लगा सकते हैं, कि प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। वास्तव में, यह कथन सत्य है तथा पूर्णाकों के अध्ययन में यह मूलरूप से एक अति महत्वपूर्ण स्थान रखता है। इसी कारण यह कथन अंकगणित की आधारभूत प्रमेय कहलाता है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के उपयोग—

- ◆ दो संख्याओं का H.C.F. और L.C.M. ज्ञात करने में।
- ◆ अपरिमेय संख्याओं के पुनर्भ्रमण में आदि।

3. नहीं, हो सकता।

यदि किन्हीं दो संख्याओं का H.C.F. अथवा L.C.M. दिया हो, तो L.C.M., H.C.F. से पूर्णतया विभाजित होगा।

$$\text{L.C.M.} = 380, \text{H.C.F.} = 18$$

$$\frac{380}{18} = 21.1$$

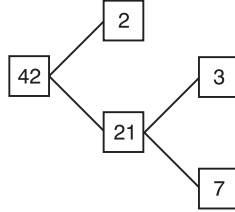
अतः यह नहीं हो सकता है।

4. अतः $x = 11130$

$$y = 5565$$

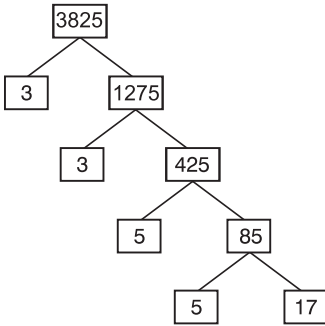
तथा $z = 53$ है।

5. $y = 21, x = 42$



अतः लुप्त संख्याएँ y और $x, 21$ और 42 है।

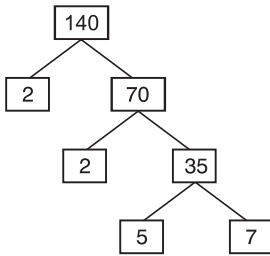
6.



$$3825 = 3^2 \times 5^2 \times 17$$

अतः 3825 का अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल रूप $3^2 \times 5^2 \times 17$ है।

7.



$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

अतः 140 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप $2^2 \times 5 \times 7$ में व्यक्त किया जा सकता है।

8. हम जानते हैं, दो संख्याओं के म०स० तथा ल०स० में सम्बन्ध

म०स० $\times$ ल०स० = एक संख्या $\times$ दूसरी संख्या दिया है,

एक संख्या = 26

दूसरी संख्या = 169

तथा म०स० = 13

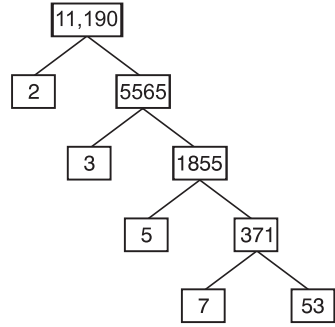
तब सूत्र से,

$$13 \times \text{ल०स०} = 26 \times 169$$

$$\text{ल०स०} = \frac{26 \times 169}{13}$$

$$\text{ल०स०} = 338$$

[जोकि पूर्णतया विभाजित नहीं कर रही है]



9. दिया है, H.C.F. = 23

$$\text{L.C.M.} = 1449$$

तथा एक संख्या = 207

तब हम जानते हैं, $\text{L.C.M.} \times \text{H.C.F.} = \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}$

$$1449 \times 23 = 207 \times \text{दूसरी संख्या}$$

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{1449 \times 23}{207} = 7 \times 23$$

$$\text{दूसरी संख्या} = 161$$

10. हमें दिया है, $\text{L.C.M.} = 36$

$$\text{H.C.F.} = 2$$

तथा एक संख्या = a

दूसरी संख्या = 18

हम जानते हैं कि $\text{L.C.M.} \times \text{H.C.F.} = \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}$

$$\text{अब, } 36 \times 2 = a \times 18$$

$$a = \frac{36 \times 2}{18}$$

$$a = 4$$

11. यदि $x = 2^3 \times 3 \times 5^2$

$$y = 2^2 \times 3^3$$

तब $\text{H.C.F.} (x, y) = 2^2 \times 3$ (जो दोनों में उभयनिष्ठ है)

$$= 4 \times 3 = 12$$

12. यदि किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त होती है, तो संख्या 6^n के अभाज्य गुणनखण्ड में संख्या 0 आनी चाहिए। यह सम्भव नहीं है, क्योंकि $6^n = (2 \times 3)^n$ है। इसी कारण 6^n के गुणनखण्ड में केवल अभाज्य संख्या 2 और 3 ही आ सकती है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 6^n के गुणनखण्ड में 2 और 3 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है। इसलिए ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 6^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, 45 और 27 का $\text{HCF} = d$

$$\text{तथा } d = 27x + 45y \quad \dots(1)$$

$$45 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 3 \times 3 \times 5$$

$$\text{तथा } 27 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 3 \times 3 \times 3$$

$$\therefore 45 \text{ और } 27 \text{ का HCF} = \text{उभयनिष्ठ गुणनखण्डों का गुणनफल}$$

$$= 3 \times 3 = 9$$

$$\therefore d = 9$$

d का मान समी० (1) में रखने पर—

$$d = 9 = 27x + 45y$$

3	45	3	27
3	15	3	9
5	5	3	3
	1		1

2. प्रश्न में दिया है।

एक संख्या = 35

दूसरी संख्या = 45

म०स० = 5 तथा ल०स० = $63 \times a$

तब, दो संख्याओं के ल०स० व म०स० में सम्बन्ध

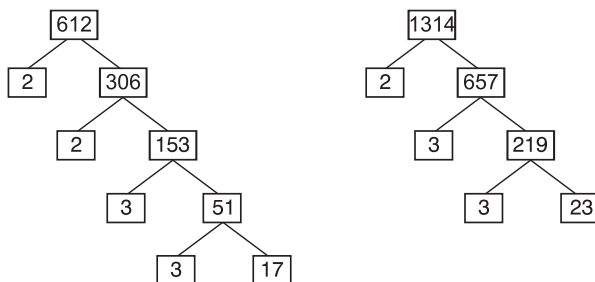
ल०स० $\times$ म०स० = पहली संख्या $\times$ दूसरी संख्या

$$63 \times a \times 5 = 35 \times 45$$

$$a = \frac{35 \times 45}{63 \times 5}$$

$$a = 5$$

3.



पूर्णांकों के युग्म (612, 1314) से—

612 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17 = 2^2 \times 3^2 \times 17$

1314 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2^1 \times 3^2 \times 73$

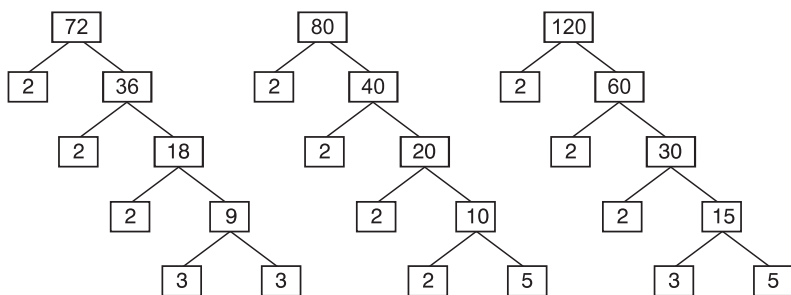
अतः महत्तम समापवर्तक (612, 1314) = $2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

[गुणनखण्डन से प्राप्त संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल]

तथा लघुत्तम समापवर्त्य (ल०स०) (612, 1314) = $2^2 \times 3^2 \times 17 \times 73 = 44676$

[गुणनखण्ड से प्राप्त संख्याओं से संबंधित प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल]

4.



$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$80 = 2^4 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

[गुणनखण्ड से प्राप्त संख्याओं से संबंधित प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल]

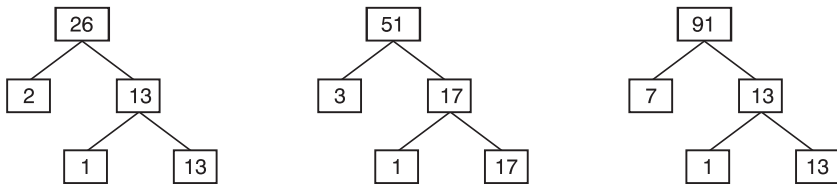
$$= 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$= 2 \times 8 \times 9 \times 5 = 16 \times 9 \times 5 = 720$$

5. यदि किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त होती है, तो संख्या 6^n के अभाज्य गुणनखण्ड में संख्या 0 आनी चाहिए। यह सम्भव नहीं है, क्योंकि $6^n = (2 \times 3)^n$ है। इसी कारण 6^n के गुणनखण्ड में केवल अभाज्य संख्या 2 और 3 ही आ सकती है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 6^n के गुणनखण्ड में 2 और 3 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है। इसलिए ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 6^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

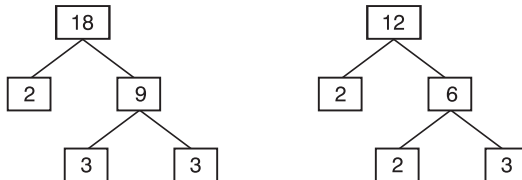
6. गुणनखण्ड वृक्ष से—



26, 51 तथा 91 का म०स० = 1

7. मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को लगा समय = 18 मिनट
इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को लगा समय = 18 रवि मिनट
= 12 मिनट

दोनों का ल०स० लेने पर, (18, 12)



$$18 = 2 \times 3^2$$

$$\text{ल०स०} = 2^2 \times 3^2$$

$$= 4 \times 9$$

$$= 36 \text{ मिनट}$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

अतः वे दोनों 36 मिनट के बाद पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।

8. दिया है— एक संख्या = 404

तथा दूसरी संख्या = 96

404, 96 का म०स०

404 तथा 96 का ल०स०

$$\begin{array}{r}
 96 \overline{)404} 4 \\
 \underline{-384} \\
 20 \overline{)96} 4 \\
 \underline{-80} \\
 16 \overline{)20} 1 \\
 \underline{-16} \\
 4 \overline{)16} 1 \\
 \underline{-16} \\
 \times
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 404, 96 \\
 \hline
 2 & 202, 48 \\
 \hline
 2 & 101, 24 \\
 \hline
 2 & 101, 12 \\
 \hline
 2 & 101, 6 \\
 \hline
 3 & 101, 3 \\
 \hline
 101 & 101, 1 \\
 \hline
 & 1, 1
 \end{array}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 101$$

अतः म०स० = 4 तथा ल०स० = 9696

प्रश्नानुसार,

सत्यापित करेंगे— H.C.F. $\times$ L.C.M. = दोनों दी गई संख्याओं का गुणनफल

$$4 \times 9696 = 404 \times 96$$

$$38784 = 38784$$

अतः यह सत्यापित हुई।

प्रश्नावली 1 B

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. माना $3 + 2\sqrt{2}$ = परिमेय संख्या है, जो $\frac{p}{q}$ के रूप में है,

$$3 + 2\sqrt{2} = \text{परिमेय संख्या} \quad \text{जहाँ } q \neq 0 \text{ है।}$$

$$3 + 2\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$2\sqrt{2} = \frac{p}{q} - 3$$

$$2\sqrt{2} = \frac{p - 3q}{1}$$

$$\sqrt{2} = \frac{p - 3q}{2q}$$

$\sqrt{2}$ पूर्णांक नहीं है, अपरिमेय है, परन्तु $\frac{p - 3q}{2q}$ परिमेय संख्या है।

हमें मिला, अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या जोकि एक विरोधाभास है।

समी० (i) में की गई कल्पना सत्य नहीं है, अतः $3 + 2\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्

2. (i) हाँ, दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या या एक अपरिमेय संख्या हो सकता है।

$$\text{उदाहरण के लिए, } \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad (\text{एक अपरिमेय संख्या})$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \quad (\text{एक परिमेय संख्या})$$

जहाँ, $\sqrt{2}$ व $\sqrt{8}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।

(ii) नहीं, माना 2 एक परिमेय संख्या तथा $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय

$$\text{तब, } 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{या } \sqrt{8}$$

3. माना $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या, जो $\frac{p}{q}$ के रूप में होगी। जहाँ $q \neq 0$ है।

$$2\sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{p}{q} \quad \text{दोनों तरफ क वर्ग करने पर}$$

$$(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$12(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{15} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$12 + 5 + 4\sqrt{15} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$17 + 4\sqrt{15} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$4\sqrt{15} = \frac{p^2}{q^2} - 17$$

$$\sqrt{15} = \frac{p^2 - 17q^2}{p^2}$$

$\sqrt{15}$ पूर्णांक नहीं एक अपरिमेय संख्या है, परन्तु $\frac{p^2 - 17q^2}{4q^2}$ एक परिमेय संख्या है।

अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या (विरोधमान है) $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ को परिमेय माना था जोकि एक विरोधाभास है, अतः $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$$\begin{aligned} \text{अब जाँच करने पर,} &= (2\sqrt{3} \times \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 4 \times 3 - 5 = 7 \end{aligned}$$

अतः $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$ एक परिमेय संख्या है।

4. माना $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\text{तब, } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q} \quad \text{जहाँ } q \neq 0 \text{ तथा } p \text{ तथा } q \text{ धन पूर्णांक है।}$$

$$q = \sqrt{2}p \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{p} = \sqrt{2}$$

अब, माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देकर p और q को सहअभाज्य बना सकते हैं।

$$\therefore q = \sqrt{2}p$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर—

$$q^2 = 2p^2 \quad \dots(1)$$

$\therefore 2, q^2$ को विभाजित करता है।

$\therefore 2, q$ को भी विभाजित करेगा।

इसलिए हम $q = 2r$ लिख सकते हैं, जहाँ r एक पूर्णांक है।

q के मान को समी (1) में रखने पर

$$(2r)^2 = 2p^2$$

$$4r^2 = 2p^2 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = p^2$$

$\therefore 2, p^2$ को विभाजित करता है।

$\therefore 2, p$ को भी विभाजित करेगा।

अतः p और q में कम-से-कम एक गुणनखण्ड 2 है। लेकिन इस तथ्य से विरोधाभास प्राप्त होता है, कि p और q में, 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है, अर्थात् p और q सहअभाज्य है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि हमने $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को एक परिमेय संख्या माना था।

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

5. माना $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

तब, $\frac{3\sqrt{2}}{1} = \frac{a}{b}$ जहाँ $b \neq 0$ तथा a व b धन पूर्णांक है।

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$$

$\therefore a, 3$ व b पूर्णांक है, इसलिए a एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

लेकिन यह इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है, क्योंकि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः निष्कर्ष यह निकलता है कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

6. माना, $5 - 2\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

तब, $5 - 2\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, जहाँ $b \neq 0$ तथा a व b धन पूर्णांक हैं।

$$\therefore 5 - 2\sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad 5 - \frac{a}{b} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{a}{2b} = \sqrt{3}$$

यहाँ, $\frac{5}{2}$ और $\frac{a}{2b}$ परिमेय संख्याएँ हैं। इसलिए इनका अन्तर भी परिमेय संख्या होगी।

$\therefore \sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगी। परन्तु यह इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है, कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः $5 - 2\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

7. माना, $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

तब, $\sqrt{6} + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, जहाँ $b \neq 0$

तथा a व b धन पूर्णांक हैं।

$$\therefore \sqrt{6} + \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} - \sqrt{6} = \sqrt{2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर—

$$\left(\frac{a}{b} - \sqrt{6}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + 6 - \frac{29}{b}\sqrt{6} = 2$$

$$\frac{a^2}{b^2} + 6 - 2 = \frac{2\sqrt{6}a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 4b^2}{b^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{b}$$

$$\frac{a^2 + 4b^2}{2ab} = \sqrt{6}$$

$\therefore 2, 4, a$ व b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a^2 + 4b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् $\sqrt{6}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु यह इस तथ्य का विरोध करता है, कि $\sqrt{6}$ एक अपरिमेय संख्या है, हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण हुआ है। अतः $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

8. माना p एक धनात्मक अभाज्य संख्या है।

$$p = 2$$

तब $\sqrt{p} = \sqrt{2}$ (अपरिमेय $\neq \frac{p}{q}$)

अतः अपरिमेय संख्याएँ व्यापक रूप में $\sqrt{p}$ द्वारा व्यक्त की जाती हैं, जहाँ p एक धनात्मक अभाज्य संख्या है। हम जानते हैं कि किसी अपरिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ रूप में

नहीं लिखा जा सकता।

यहाँ p एवं q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

9. दिया है,

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) &= (2+\sqrt{5})^2 \\ &= (2)^2 + (\sqrt{5})^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} \\ &= 4 + 5 + 4\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore$ 9 व 4 पूर्णांक हैं। तथा $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ $9 + 4\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः $(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$ एक अपरिमेय संख्या है।

10. दिया है, $6 + \sqrt{9} = 6 + 3 = 9$

$\therefore$ 9 एक पूर्णांक है। इसलिए 9 एक परिमेय है।

अतः $6 + \sqrt{9}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $6 + \sqrt{9}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (d) 3. (a) 4. (a) 5. (a) 6. (c) 7. (b) 8. (c)
9. (c) 10. (d)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (c) 4. (b)

चित्र आधारित प्रश्न

1. यहाँ,

$$x = 5 \times 2783$$

$$x = 13915$$

2. यहाँ,

$$2783 = 253 \times y$$

$$\Rightarrow y = \frac{2783}{253} \Rightarrow y = 11$$

3. यहाँ,

$$253 = 11 \times z \Rightarrow z = \frac{235}{11} \Rightarrow z = 23$$

4. यहाँ,

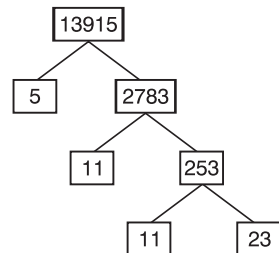
$$13915 = 5 \times 2783$$

$\therefore$ 13915 का 1 एक अतिरिक्त भी गुणनखण्ड है।

$\therefore$ 13915 एक भाज्य संख्या है।

5. गुणनखण्ड वृत्त के द्वारा,

$$13915 = 5 \times 2783$$



$$\begin{aligned}
 &= 5 \times 253 = 11 \\
 &= 5 \times 11 \times 23 \times 11 \\
 &= 5 \times 11^2 \times 23
 \end{aligned}$$

अतः $5 \times 11^2 \times 23$, संख्या 13915 के अभाज्य गुणनखण्ड है।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iii) 2. (iv)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (a)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iv)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. माना धनात्मक पूर्णांक a है तथा $b = 3$ है।

यूक्लिड विभाजन प्रक्रिया से $a = 3q + r$, $q > 0$ और $0 \leq r \leq 3$

$$\Rightarrow a = 3q \text{ (जब } r = 0); a = 3q + 1 \text{ (जब } r = 1); a = 3q + 2 \text{ (जब } r = 2)$$

$$\text{जब; } a = 3q \Rightarrow a^3 = 27q^3 \Rightarrow a^3 = 9(3q^3) \Rightarrow a^3 = 9m$$

$$\text{जहाँ; } a = 3q + 1 \Rightarrow a^3 = (3q + 1)^3 \Rightarrow a^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$$

$$\Rightarrow a^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1 \Rightarrow a^3 = 9m + 1$$

$$\text{जब; } a = 3q + 2 \text{ तब}$$

$$a^3 = (3q + 2)^3 \Rightarrow a^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$$

$$a^3 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8 \Rightarrow a^3 = 9m + 8$$

$$\text{जहाँ } m \text{ एक पूर्णांक है, तथा } m = (3q^3 + 6q^2 + 4q)$$

अतः किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$ या $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप में होता है।

2. माना ल०स० ' a ' तथा म०स० ' b ' है।

तब प्रश्नानुसार,

$$a + b = 7380 \quad \dots(1)$$

$$a - b = 7340 \quad \dots(2)$$

समी (1) व समी (2) को जोड़ने पर,

$$a + b + a - b = 14720 \quad \Rightarrow \quad 2a = 14720$$

$$a = 7360$$

अतः $a = 7360$, तथा $\text{म०स०} = 20$ होगा।

माना दो संख्याएँ p तथा q हैं, जिनका ल०स० तथा म०स० ज्ञात किया गया है तब,

दोनों संख्याओं का गुणनफल = ल०स० $(p, q) \times \text{म०स०} (p, q)$

$$= 7360 \times 20 = 147200$$

अतः दोनों संख्याओं का गुणनफल 147200 है।

3. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करते हुए,

$$963 = 657 \times 1 + 306 \quad (\because 963 > 657)$$

$$\Rightarrow 657 = 306 \times 2 + 45$$

$$\Rightarrow 306 = 45 \times 6 + 45$$

$$\Rightarrow 45 = 36 \times 1 + 9$$

$$\Rightarrow 36 = 9 \times 4 + 0$$

$\therefore$ महत्तम समावर्तक $(657, 963) = 9$

अब यहाँ दिया गया है कि 657 और 963 का महत्तम समापवर्तक $657x + 964(-15)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\Rightarrow 657x + 963(-15) = 9$$

$$\Rightarrow 657x - 14445 = 9$$

$$\Rightarrow 657x = 9 + 14445 \Rightarrow 657x = 14454$$

$$\Rightarrow x = \frac{14454}{657} \Rightarrow x = 22$$

अतः x का 22 होगा।

4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$72 = 56 \times 1 + 16 \quad (\because 72 > 56)$$

$$\Rightarrow 56 = 16 \times 3 + 8 \Rightarrow 16 = 8 \times 2 + 0$$

$$\text{अतः म०स०} \quad (56, 72) = 8 = d$$

$$\therefore \text{ दिया है, } d = 56m + 72n$$

$$8 = 56 + 72n$$

$$\Rightarrow 8 = 5 \times 4 + 72 \times (-3)$$

$$8 = 224 - 216$$

अतः m व n के मान क्रमशः 4 तथा -3 होंगे।

यहाँ $m = 0$ तथा $n = \frac{1}{9}$ या $m = \frac{1}{7}$ तथा $n = 0$ भी $8 = 56m + 72n$ को संतुष्ट करते हैं,

इसलिए m व n अद्वितीय नहीं हैं।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) कक्षा-पुस्तकालय के लिए न्यूनतम पुस्तकें = ल०स० $(32, 36)$

$$32 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$36 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{ल०स० } (32, 36) = 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288$$

अतः सेक्शन-A तथा सेक्शन-B विद्यार्थियों के बीच समान पुस्तक वितरित करने के लिए 288 पुस्तक कक्षा-पुस्तकालय में होनी चाहिए।

2. (b) दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = HCF $\times$ LCM

$$\text{तब, } 32 \times 36 = \text{HCF}(32, 36) \times \text{LCM}(32, 36)$$

$$32 \times 36 = \text{HCF}(32, 36) \times 288$$

$$\text{HCF}(32, 36) = \frac{32 \times 36}{288} = 4$$

$$\text{अतः } \text{HCF}(32, 36) = 4 \text{ होगा।}$$

3. (a) 36 का अभाज्य गुणनफल = $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

4. (b) $7 \times 11 \times 13 \times 15 + 15 = 15(7 \times 11 \times 13 + 1)$

$$= 15 \times (1001 + 1) \Rightarrow 15 \times 1002$$

अतः $7 \times 11 \times 13 \times 15 + 15$ के स्वयं संख्या तथा 1 के अतिरिक्त भी गुणनखण्ड है, तब यह एक मिश्रित संख्या है।

5. (b) दिया है $p = ab^2$ तथा $q = a^2b$ तब

$$\text{LCM}(p, q) = a^2 \times b^2$$

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (b) प्रत्येक द्वारा चली गयी न्यूनतम दूरी = LCM (80, 85, 90)

$$\text{अब, 80 का अभाज्य गुणनफल} = 2^4 \times 5$$

$$80 \text{ का अभाज्य गुणनफल} = 17 \times 5$$

$$90 \text{ का अभाज्य गुणनफल} = 3^2 \times 2 \times 5$$

$$\text{अतः } \text{LCM}(80, 85, 90) = 2^4 \times 5 \times 17 \times 3^2 = 12240 \text{ सेमी} = 122 \text{ मी } 40 \text{ सेमी}$$

अतः प्रत्येक द्वारा चली गयी न्यूनतम दूरी 122 मी 40 सेमी होगी।

2. (d) प्रत्येक अंजलि, सोफिया और एंजेलिना के द्वारा चली गयी दूरी = 12240 सेमी

$$\text{अंजलि द्वारा उठाये गये कदमों की संख्या} = \frac{12240}{80} = 153$$

$$\text{सोफिया द्वारा उठाये गये कदमों की संख्या} = \frac{12240}{85} = 144$$

$$\text{एंजेलिना द्वारा उठाये गये कदमों की संख्या} = \frac{12240}{90} = 136$$

अतः एंजेलिना द्वारा न्यूनतम कदम 136 चले गये हैं।

3. (a) HCF (80, 85, 90) के लिए,

$$80 \text{ का गुणनफल} = 2^4 \times 5$$

$$85 \text{ का गुणनफल} = 17 \times 5$$

$$90 \text{ का गुणनफल} = 3^2 \times 2 \times 5$$

अतः $\text{LCM}(80, 85, 90) = 5$ है।

4. (c) हमें ज्ञात है, $\text{LCM}(80, 85, 90) = 12240$

$$\text{HCF}(90, 85, 90) = 5$$

$$\text{अतः } \text{LCM}(80, 85, 90) \times \text{LCM}(80, 85, 90) = 12240 \times 5 = 61200$$

5. (d) 90 का अभाज्य गुणनफल $= 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

अतः 90 का अभाज्य गुणनफल $2 \times 3^2 \times 5$ होगा।

2

बहुपद (Polynomials)

प्रश्नावली 2 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. बहुपद $x^3 - 2x + 5x^4 + 1$ में चर x की उच्चतम घात वाले पद $5x^4$ का घातांक 4 है।

अतः बहुपद $x^3 - 2x + 5x^4 + 1$ की घात 4 है।

2. दिया है, बहुपद $p(x) = 2x^2 + x + k$ का एक शून्यक 3 तब $p(3) = 0$ से

$$p(3) = 2(3)^2 + 3 + k$$

$$0 = 2 \times 9 + 3 + k$$

$$18 + 3 + k = x$$

$$k = -21$$

3. रैखिक बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ—सर्वप्रथम एक रैखिक बहुपद $ax + b, a \neq 0$ पर विचार करते हैं। हम जानते हैं कि $y = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा प्राप्त होती है। जो X -अक्ष को ठीक एक बिन्दु $(-b/a, 0)$ पर काटती है। हम यह भी जानते हैं कि रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $(-b/a)$ होता है। अतः रैखिक बहुपद $ax + b, a \neq 0$ का केवल एक शून्यक है जो उस बिन्दु का x -निर्देशांक है, जहाँ $y = ax + b$ का आलेख (ग्राफ) X -अक्ष को काटता है।

4. दिया है,

α, β बहुपद के शून्यक हैं, जहाँ $\alpha + \beta = 6$ तथा $\alpha\beta = 4$

$\therefore$ अभीष्ट बहुपद $p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 6x + 4$

अतः अभीष्ट बहुपद $x^2 - 6x + 4$ है।

5. $p(x) = 4x^2 + \frac{3x}{2} - 9$ का $x = -2$ पर मान

$$p(-2) = 4(-2)^2 + \frac{3(-2)}{2} - 9$$

$$p(-2) = 4 \times 4 - \frac{3 \times 2}{2} - 9$$

$$p(-2) = 16 - 3 - 9$$

$$p(-2) = 16 - 12$$

$$p(-2) = 4$$

6. $p(x) = 3x - 12$

$$3x - 12 = 0$$

[$p(x)$ के शून्यक के लिए]

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

7. दिया है,

बहुपद $2y^2 + 7y + 5$ के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यों का योग $= (\alpha + \beta) = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$\alpha + \beta = \frac{-7}{2}$$

तथा शून्यों का गुणनफल $= (\alpha\beta) = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$$\alpha\beta = \frac{5}{2}$$

अब, प्रश्नानुसार—

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = \frac{-7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{-7+5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = -1$$

8. दिया है,

शून्यों का योग $= 0$

तथा शून्यों का गुणनफल $= (-4)$

$\therefore$ बहुपद $p(x) = x^2 - (\text{शून्यों का योग}) x + \text{शून्यों का गुणनफल}$

$$= x^2 - 0x + (-4) = x^2 - 4$$

अतः अभीष्ट बहुपद $x^2 - 4$ है।

9. दिया है, शून्यों का गुणनफल $= 1$

तथा शून्यों का योग $= (-12)$

$\therefore$ बहुपद $p(x) = x^2 - (\text{शून्यों का योग}) x + \text{शून्यों का गुणनफल}$

$$= x^2 - (-12)x + 1$$

$$= x^2 + 12x + 1$$

अतः अभीष्ट बहुपद $x^2 + 12x + 1$ है।

10. माना त्रिघात बहुपद के शून्यक निम्न हैं— $\alpha = 3, \beta = -1$ तथा $\gamma = \frac{-1}{3}$

$$\text{तब, } \alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(\frac{-1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3(-1) + (-1)\left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 3$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3}$$

$$\alpha\beta\gamma = 3(-1) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$$

अब, अभीष्ट त्रिघात बहुपद $= k[x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma]$

जहाँ k एक शून्येत्तर अचर राशि है।

$$= k \left[x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \left(\frac{-11}{3}\right)x - 1 \right]$$

$$= k \left[\frac{3x^3 - 5x^2 - 11x - 3}{3} \right]$$

$$= 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 \quad (\text{यहाँ, } k = 3 \text{ लेने पर})$$

11. दिया है, द्विघात बहुपद के शून्यांक $3 + \sqrt{2}$ तथा $3 - \sqrt{2}$ हैं।

$$\therefore \text{ शून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{तथा शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\beta) &= (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \\ &= 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ बहुपद } p(x) = x^2 - (\text{शून्यकों का योग})x + \text{शून्यकों का गुणनफल} \\ = x^2 - 6x + 7$$

अतः अभीष्ट बहुपद $x^2 - 6x + 7$ है।

12. $p(x) = 3x^2 + 4x + 2k$

$$p(-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) + 2k$$

$$0 = 3 \times 4 - 8 + 2k$$

$$2k + 12 - 8 = 0$$

$$2k + 4 = 0$$

$$k = -2$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. बहुपद $x^2 - x - 6$ के गुणनखण्ड करने पर—

$$\text{माना, } f(x) = x^2 - x - 6$$

$$= x^2 - (3-2)x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6$$

$$= x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2)$$

बहुपद के शून्यक के लिए, $f(x) = 0$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x+2) = 0$$

$$\text{यदि } x-3=0, \quad \text{तब } x=3$$

$$\text{यदि } x+2=0, \quad \text{तब } x=-2$$

अतः $(x=3)$ तथा $(x=-2)$ दिए गए बहुपद के शून्यक हैं।

2. बहुपद $3x^2 - x - 4$ के गुणनखण्ड करने पर

$$3x^2 - x - 4 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$$

$$x(3x-4) + 1(3x-4) = 0$$

$$(3x-4)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{-4}{3}, \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

अतः बहुपद $3x^2 - x - 4$ के शून्यक $\frac{4}{3}$ व -1 हैं।

$$\text{सत्यता की जाँच—शून्यकों का योगफल } \alpha + \beta = \frac{4}{3} + (-1) = \frac{1}{3} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } \alpha\beta = \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{-4}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अतः सम्बंध सत्य है।

3. दिया है, $p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ शून्यक α, β, γ

$$\text{मानक समीकरण } ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } \alpha\beta\gamma = \frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a}$$

$$\alpha \times \beta = 12 \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{तब } \alpha\beta\gamma = \frac{-24}{1}$$

$$12 \times \gamma = -24$$

$$\gamma = \frac{-24}{12}$$

$$\gamma = -2$$

अब, $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ के गुणनखण्ड करने पर

$$x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 5x^2 - 2x + 24$$

$$x^3 + 2x^2 - 7x^2 - 14x + 14x - 2x + 24$$

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 2x^2 - 7x^2 - 14x + 12x + 24 \\
 & x^2(x+2) - 7x(x+2) + 12(x+2) \\
 & (x+2)[x^2 - 7x + 12] \\
 & x^2 - 7x + 12 = x^2 - 4x - 3x + 12 \\
 & = x(x-4) - 3(x-4) \\
 & (x-4)(x-3) \\
 & (x+2)(x-4)(x-3) = 0
 \end{aligned}$$

$$x+2=0, \quad x-4=0, \quad x-3=0$$

$$x=-2, \quad x=4, \quad x=3$$

अतः बहुपद के शून्यक 3, 4, -2 हैं।

4. $\alpha + \beta = 2 - 6 = -4$

$$\alpha\beta = 2 \times -6 = -12$$

मान मूल समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ में रखने पर

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

सत्यता की जाँच-

$$\text{शून्यकों का योगफल } \alpha + \beta = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha + \beta = 2 - 6 = -4$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta = 2 \times (-6) = -12$$

उक्त मान मूल समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ में रखने पर,

$$x^2 + 4x - 12$$

अतः यह सत्यापित हुआ।

5. दिया है, बहुपद $2x^2 - 3x + 5 = 0$ जिसके मूल α व β हैं।

$$\text{तब, शून्यकों का योगफल} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta = \frac{5}{2}$$

प्रश्नानुसार, $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$

$$\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \text{समी (1)}$$

$\alpha\beta$ व $(\alpha+\beta)$ के मान समी (1) में रखने पर

$$\frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

6. दिया है, द्विघात बहुपद के शून्यांकों का योग $= -12$

तथा एक शून्यांक $= -4$

तब, दूसरा शून्यांक = शून्यांकों का योग - पहला शून्यांक

$$= (-12) - (-4)$$

$$= -12 + 4 \Rightarrow -8$$

अब, शून्यांकों का गुणनफल $= (-4) \times (-8) = +32$

$\therefore$ अभीष्ट बहुपद $= x^2 - (\text{शून्यांकों का योग})x + \text{शून्यांकों का गुणनफल}$

$$= x^2 - (-12)x + 32$$

$$= x^2 + 12x + 32$$

अतः अभीष्ट बहुपद $x^2 + 12x + 32$ है।

7. वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल है—

(i) दिया है, शून्यकों का योग $= 0$

शून्यकों का गुणनफल $= -\sqrt{2}$

मूलभूत समी० $= x^2 - (\text{शून्यकों का योग})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}$

$$= x^2 - 0 \times x + (-\sqrt{2})$$

$$= x^2 - \sqrt{2}$$

(ii) दिया है, शून्यकों का योगफल $= 2 + \sqrt{3}$

शून्यकों का गुणनफल $= 2 - \sqrt{3}$

मूलभूत समी० $x^2 - (\text{शून्यकों का योगफल})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}$ में उक्त

मान रखने पर $x^2 - (x + \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3}$

8. दिया है, द्विघात बहुपद $(k-1)x^2 + kx + 1$ का एक शून्यांक $= (-3)$

बहुपद के शून्यांकों के लिए, $f(-3) = 0$ होता है।

$$\therefore f(-3) = 0$$

$$(k-1)(-3)^2 + k(-3) + 1 = 0$$

$$9(k-1) - 3k + 1 = 0$$

$$9k - 9 - 3k + 1 = 0$$

$$6k - 8 = 0$$

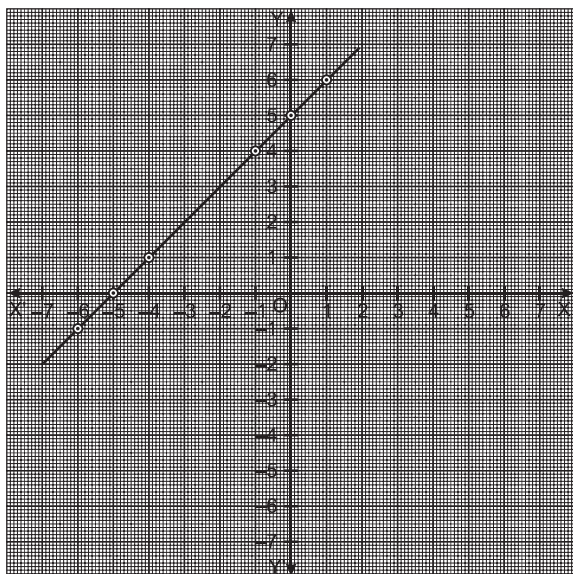
$$6k = 8$$

$$k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

अतः k का मान $\frac{4}{3}$ है।

9. माना $y = x + 5$ आलेख (ग्राफ) निरूपित करने के लिए x के भिन्न-भिन्न मानों के लिए y के भिन्न-भिन्न मानों का निर्धारण निम्नवत् है।

x	-5	-4	-6	0	1	-1
y	0	1	-1	5	6	4



अब बिन्दुओं $A(-5, 0)$, $B(-4, 1)$, $C(-6, -1)$, $D(0, 5)$, $E(1, 6)$ तथा $F(-1, 4)$ को ग्राफ पेपर पर अंकित करते हैं तथा उन्हें सरल रेखा द्वारा मिलाते हैं।

अतः $y = x + 5$ का आलेख (ग्राफ) बिन्दुओं $A(-5, 0)$, $D(0, 5)$ से जाने वाली एक सरल रेखा है, जोकि X -अक्ष को बिन्दु $A(-5, 0)$ पर प्रतिच्छेद करती है।

अतः $x + 5$ का शून्यक -5 है।

10. दिया है, $(x+a)$, दो बहुपदों $x^2 + px + q$ तथा $x^2 + mx + n$ का गुणनखण्ड है।

माना, $f(x) = x^2 + px + q$ तथा $p(x) = x^2 + mx + n$

यदि $x + a = 0$, तब $x = -a$

$\therefore$ बहुपदों $f(x)$ तथा $p(x)$ दोनों का एक शून्यांक $(x = -a)$ है।

$\therefore f(-a) = p(-a)$

$$(-a)^2 + p(-a) + q = (-a)^2 + m(-a) + n$$

$$a^2 - ap + q = a^2 - am + n$$

$$am - ap = n - q$$

$$a(m - p) = n - q$$

अतः

$$a = \frac{n - q}{m - p}$$

सिद्ध हुआ।

11. यदि $(x = -4)$, बहुपद $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$ का एक शून्यक है।

तब, $f(-4) = 0$ होगा।

$$f(-4) = 2(-4)^2 + 5(-4) - 12 = 2 \times 16 - 20 - 12 = 32 - 32 = 0$$

अतः $(x = -4)$, बहुपद $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$ का एक शून्यक है।

अब, शून्यकों का गुणनफल = $\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-12}{2} = -6$

तब, दूसरा शून्यांक = $\frac{\text{शून्यकों का गुणनफल}}{\text{पहला शून्यक}} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

अतः बहुपद का दूसरा शून्यक $\frac{3}{2}$ है।

12. बहुपद $2x^2 + 2ax + 5x + 10$ का एक गुणनखण्ड

दिया है, $(x+a)$ समीकरण में रखने पर $x = -a$

$$2(-a)^2 + 2a \times -a + 5 \times -a + 10$$

$$2a^2 - 2a^2 - 5a + 10 = 0$$

$$-5a + 10 = 0$$

$$10 = 5a$$

$$a = \frac{10}{5}$$

$$a = 2$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (a) 3. (b) 4. (d) 5. (d) 6. (b) 7. (a) 8. (d)
9. (a) 10. (b)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (d) 4. (c)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र में दिये गये पथ एक परवलय है।
2. चित्र से, परवलय x -अक्ष को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है, जो $x = 1$ तथा $x = 4$ हैं।

अतः $x = 1$ तथा $x = 4$ दिये गये परवलय के शून्यक हैं।

3. चित्र से, दिये गये बहुपद के दो शून्यक $x = 1$ तथा $x = 4$ हैं, तब माना $\alpha = 1$ तथा $\beta = 4$

दिये गये बहुपद का व्यंजन $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ होगा। $f(x) = x^2 - (1+4)x + (1)(4)$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

4. यह बहुपद एक द्विघातीय बहुपद है।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (i)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (a) 2. (a) 3. (d) 4. (b) 5. (d)

सुमेलन आधारित प्रश्न

1. (d) 2. (e) 3. (a) 4. (b) 5. (c)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iv) 2, 3, 4, 5

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को $x^2 - 2x + k$ द्वारा विभाजित करने पर,

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + (8 - k) \\
 \hline
 x^2 - 2x + k \overline{) x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10} \\
 \underline{x^4 - 2x^3 + kx^2} \\
 -4x^3 + (16 - k)x^2 - 25x + 10 \\
 \underline{-4x^3 + 8x^2 - 4kx} \\
 + - + \\
 \hline
 (8 - k)x^2 + (4k - 25)x + 10 \\
 \underline{(8 - k)x^2 + (-16 + 2k)x + (8 - k)k} \\
 \hline
 (2k - 9)x + 10 - (8 - k)k
 \end{array}$$

$$\therefore \text{शेषफल} = (2k - 9)x - (8 - k)k + 10$$

$$\therefore x + a = (2k - 9)k - (8 - k)k + 10$$

दोनों ओर तुलना करने पर,

$$2k - 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2k = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 5}$$

$$\text{और} \quad - (8 - k)k + 10 = a$$

$$- (8 - 5)5 + 10 = a \quad \Rightarrow \quad - 3(5) + 10 = a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = -5}$$

अतः 'k' तथा 'a' के मान क्रमशः 5 व -5 है।

2. दिया है, $(x+a)$, दो बहुपदों $x^2 + px + q$ तथा $x^2 + mx + n$ का गुणनखण्ड है।

$$\text{माना, } f(x) = x^2 + px + q \quad \text{तथा} \quad p(x) = x^2 + mx + n$$

यदि $x+a=0$, तब $x=-a$

$\therefore$ बहुपदों $f(x)$ तथा $p(x)$ दोनों का एक शून्यांक $(x=-a)$ है।

$$\therefore f(-a) = p(-a)$$

$$(-a)^2 + p(-a) + q = (-a)^2 + m(-a) + n$$

$$a^2 - ap + q = a^2 - am + n$$

$$am - ap = n - q$$

$$a(m - p) = n - q$$

$$\text{अतः} \quad a = \frac{n - q}{m - p}$$

सिद्ध हुआ।

3. हम जानते हैं,

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 46x - 2 = g(x) \times (x^2 - 3x - 5) + (-5x + 8)$$

$$4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 46x - 8 = g(x) \times (x^2 - 3x - 5)$$

$$4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 41x - 10 = g(x) \times (x^2 - 3x - 5)$$

$$(4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 41x - 10) \div (x^2 - 3x - 5) = g(x)$$

$$4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 41x - 10 \text{ को } x^2 - 3x - 5 \text{ से भाग देने पर,}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 7x + 2 \\ x^2 - 3x - 5 \overline{) 4x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 41x - 10} \\ \underline{4x^4 - 12x^3 - 20x^2} \\ 7x^3 - 19x^2 - 41x \\ \underline{7x^3 - 21x^2 - 35x} \\ 2x^2 - 6x - 10 \\ \underline{2x^2 - 6x - 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{भागफल} = 4x^2 + 7x + 2$$

$$\text{अतः } g(x) = 4x^2 + 7x + 2 \text{ होगा।}$$

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) $ax^2 + bx + c$, में $a \neq 0$ अर्थात् 'a' कभी भी शून्य नहीं हो सकता, यदि a का मान शून्य हो जायेगा। तब द्विघात बहुपद एक रेखीय बहुपद बन जायेगी। अतः $ax^2 + bx + c$ में a एक शून्येतर संख्या है और b व c कोई वास्तविक संख्याएँ हैं।

2. (d) यदि किसी द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के मूल बराबर हो जाते हैं तब $D = b^2 - 4ac$ का मान शून्य होगा, अर्थात् $D = 0$ होगा।
3. (b) यदि α तथा $\frac{1}{\alpha}$, द्विघात बहुपद $2x^2 - x + 8k$ के शून्यक हैं, तब

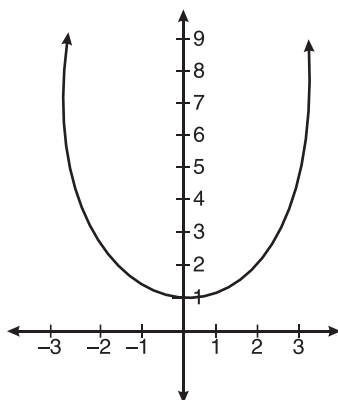
$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$1 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

अतः k का मान $\frac{1}{4}$ होगा।

4. (c) समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का ग्राफ,

x	0	-1	1	2	-2
y	1	2	2	9	9



अतः ग्राफ न तो x -अक्ष को स्पर्श करता है और न ही प्रतिच्छेद करता है।

5. (c) ग्राफ द्विघात समीकरण के मूल ' α ' व ' β ' हैं, तब;

$$\text{मूलों का योग } \alpha + \beta = -p$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल } \alpha \cdot \beta = \frac{-1}{p}$$

$$\text{तब द्विघात समीकरण} = l(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta)$$

$$= k \left[x^2 - (-p) + \left(-\frac{1}{p} \right) \right] = k \left(x^2 + px - \frac{1}{p} \right)$$

$$\text{अतः द्विघात समीकरण } k \left(x^2 + px - \frac{1}{p} \right) \text{ होगी।}$$

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (a) दिया गया ग्राफ x -अक्ष को दो भिन्न बिन्दुओं $x = -2$ तथा $x = 8$ पर प्रतिच्छेद करता है।

अतः $x = -2, 8$ दिये गये बहुपद के शून्य होंगे।

2. (b) चित्र में दिये गये बहुपद के शून्यक -2 व 8 हैं।

माना $\alpha = -2$ तथा $\beta = 8$ है, तब

$$\begin{aligned}\text{बहुपद का व्यंजन} &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - (-2 + 8)x + (-2)(8) \\ &= x^2 - 6x - 16 \\ &= -x^2 + 6x + 16\end{aligned}$$

3. (c) दिये गये बहुपद का व्यंजन $p(x) = -x^2 + 6x + 16$ है।

तब $x = 4$ पर $p(x)$ का मान होगा।

$$p(4) = -(4)^2 + 6(4) + 16 = -16 + 24 + 16 = 24$$

अतः $x = 4$ पर बहुपद का मान 24 होगा।

4. (d) माना $p(x) = -x^2 + 3x - 2$

शून्यक प्राप्त करने के लिए, $p(x) = 0$ रखेंगे

$$\text{तब} \quad -x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - (2+1)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + x + 2$$

$$\Rightarrow \quad x(x-2) - 1(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 \text{ तथा } x = 1$$

अतः दिये गये व्यंजन $-x^2 + 3x - 2$ के शून्यक 1, 2 होंगे।

5. (b) दिया है; एक शून्यक $= 4$ तथा

शून्यकों का योग $= -3$

माना शून्यक ' α ' व ' β ' हैं तब $\alpha = 4$ तथा $\alpha + \beta = -3$

$$\text{अब } \alpha + \beta = -3 \Rightarrow 4 + \beta = -3 \Rightarrow \beta = -7$$

सुरंग का बहुपद $= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

$$= x^2 - (4 + (-7))x + (4)(-7) = x^2 + 3x - 28$$

अतः आवश्यक सुरंग का बहुपद $x^2 + 3x - 28$ होगा।



प्रश्नावली 3 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए—

$$(i) \quad 7x - 15y = 2 \quad \dots(1)$$

$$x + 2y = 3 \quad \dots(2)$$

समी (2) से, $x + 2y = 3$

$$x = 3 - 2y \quad \dots(3)$$

x का मान समी (1) में रखने पर

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$21 - 14y - 15y = 2$$

$$21 - 29y = 2$$

$$21 - 2 = 29y$$

$$29y = 19$$

$$y = \frac{19}{29}$$

y का मान समी (3) में रखने पर

$$x = 3 - 2y$$

$$x = \frac{3 - 2 \times 19}{29}$$

$$x = 3 - \frac{38}{29} = \frac{87 - 38}{29}$$

$$x = \frac{49}{29}$$

अतः $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$ है।

$$(ii) \quad s - t = 3$$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6 \quad \dots(2)$$

समी० (1) से—

$$s = 3 + t \quad \dots(3)$$

अब, s का मान समी० (2) में रखने पर—

$$\begin{aligned}\frac{3+t}{3} + \frac{t}{2} &= 6 \\ \frac{2(3+t)+3t}{6} &= 6 \\ 6+2t+3t &= 6 \times 6 \\ 5t &= 36-6 \\ t &= \frac{30}{5} = 6 \\ t &= 6\end{aligned}$$

t का मान समी० (3) में रखने पर—

$$\begin{aligned}s &= 3+6 \\ s &= 9\end{aligned}$$

अतः ($s = 9$) तथा ($t = 6$)

$$(iii) \quad x - 5y = 11 \quad \dots(1)$$

$$2x + 3y = 0 \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned}x - 5y &= 11 \\ x &= 11 + 5y \quad \dots(3)\end{aligned}$$

x का मान समी (2) में रखने पर

$$\begin{aligned}2(11+5y) + 3y &= 0 \\ 22+10y+3y &= 0 \\ 22+13y &= 0 \\ 13y &= -22 \\ y &= \frac{-22}{13}\end{aligned}$$

अब y का मान समी (3) में रखने पर

$$\begin{aligned}x &= 11 + 5 \times \frac{(-22)}{13} \\ x &= 11 - \frac{110}{13} \\ x &= \frac{143-110}{13} = \frac{33}{13} \\ x &= \frac{33}{13}\end{aligned}$$

अतः $x = \frac{33}{13}$ तथा $y = \frac{-22}{13}$ है।

$$(iv) \quad 0.2x + 0.3y = 1.3$$

$$0.4x + 0.5y = 2.3$$

समी० (1) से—

$$0.3y = 1.3 - 0.2x$$

$$y = \frac{(1.3 - 0.2x)}{0.3} \times \frac{10}{10}$$

$$y = \frac{13 - 2x}{3} \quad \dots(3)$$

y का मान समी० (2) में रखने पर—

$$0.4x + 0.5 \times \left(\frac{13 - 2x}{3} \right) = 2.3$$

$$\frac{3 \times 0.4x + 6.5 - x}{3} = 2.3$$

$$1.2x - x + 6.5 = 2.3 \times 3$$

$$0.2x = 6.9 - 6.5$$

$$x = \frac{0.4}{0.2} = 2$$

$$x = 2$$

x का मान समीकरण (3) में रखने पर—

$$y = \frac{13 - 2 \times 2}{3} = \frac{13 - 4}{3} = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

अतः ($x = 2$) तथा ($y = 3$)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रतिस्थापन विधि द्वारा हल कीजिए :

$$1. \quad 3x - y = 12 \quad \dots(1)$$

$$2x + y = 13 \quad \dots(2)$$

समी० (1) से, $3x - y = 12$

$$3x - 12 = y \quad \dots(3)$$

y का मान समी (2) में रखने पर

$$2x + 3x - 12 = 13$$

$$5x - 12 = 13$$

$$5x = 13 + 12$$

$$5x = 25$$

$$x = \frac{25}{5}$$

$$x = 5$$

x का मान समी (iii) में रखने पर

$$3 \times 5 - 12 = y$$

$$15 - 12 = y$$

$$y = 3$$

अतः $x = 5$ व $y = 3$ है।

2. $x + y = 3$... (1)

$$2x + 5y = 12$$
 ... (2)

समी (1) से

$$x + y = 3$$

$$x = 3 - y$$
 ... (3)

समी (2) में x का मान रखेंगे

$$2(3 - y) + 5y = 12$$

$$6 - 2y + 5y = 12$$

$$6 + 3y = 12$$

$$3y = 12 - 6$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

अब, y का मान समी (3) में रखेंगे—

$$x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

अतः $x = 1$ व $y = 2$ है।

3. $x - y = 12$... (1)

$$2x - 3y = 1$$
 ... (2)

समी (1) से

$$x - y = 12$$

$$x = 12 + y$$
 ... (3)

x का मान समी (2) में रखने पर

$$2(12 + y) - 3y = 1$$

$$4 + 2y - 3y = 1$$

$$4 - y = 1$$

$$4 = 1 + y$$

$$y = 4 - 1$$

$$y = 3$$

अब, y का मान समी (3) में रखने पर

$$x = 12 + 3$$

$$x = 15$$

अतः $x = 15$ व $y = 3$ है।

$$4. \quad x + y = 7 \quad \dots(1)$$

$$3x - y = 9 \quad \dots(2)$$

$$x + y = 7 \text{ से}$$

$$x = 7 - y \quad \dots(3)$$

x का मान समी (2) में रखने पर

$$3(7 - y) - y = 9$$

$$21 - 3y - y = 9$$

$$21 - 4y = 9$$

$$21 = 4y + 9$$

$$4y = 21 - 9$$

$$4y = 12$$

$$y = \frac{12}{4}$$

$$y = 3$$

y का मान समी (3) में रखने पर

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

अतः $x = 4$ व $y = 3$ है।

$$5. \quad 0.2x + 0.3y = 1.3$$

$$0.4x + 0.5y = 2.3$$

समी० (1) से—

$$0.3y = 1.3 - 0.2x$$

$$y = \frac{(1.3 - 0.2x)}{0.3} \times \frac{10}{10}$$

$$y = \frac{13 - 2x}{3}$$

$$\dots(3)$$

y का मान समी० (2) में रखने पर—

$$0.4x + 0.5 \times \left(\frac{13 - 2x}{3} \right) = 2.3$$

$$\frac{3 \times 0.4x + 6.5 - x}{3} = 2.3$$

$$1.2x - x + 6.5 = 2.3 \times 3$$

$$0.2x = 6.9 - 6.5$$

$$x = \frac{0.4}{0.2} = 2$$

$$x = 2$$

x का मान समीकरण (3) में रखने पर—

$$y = \frac{13 - 2 \times 2}{3} = \frac{13 - 4}{3} = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

अतः ($x = 2$) तथा ($y = 3$)

$$6. \quad x + y = 3.3 \quad \dots(1)$$

$$\frac{0.6}{3x - 2y} = -1$$

$$0.6 = 2y - 3x$$

$$2y - 3x = 0.6 \quad \dots(2)$$

$$\text{समी (1) से} \quad x = 3.3 - y \quad \dots(3)$$

x का मान समी (2) में रखने पर

$$2y - 3(3.3 - y) = 0.6$$

$$2y - 9.9 + 3y = 0.6$$

$$2y + 3y = 0.6 + 9.9$$

$$5y = 10.5$$

$$y = \frac{10.5}{5}$$

$$y = 2.1$$

y का मान समी (3) में रखने पर

$$x = 3.3 - 2.1$$

$$x = 1.2$$

अतः $x = 1.2$ व $y = 2.1$ है।

$$7. \text{ माना, पहली संख्या } = x \text{ तथा दूसरी संख्या } = y$$

$$\text{तब,} \quad x - y = 26 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा} \quad x = 3y \quad \dots(2)$$

x का यह मान समी० (1) में रखने पर—

$$3y - y = 26$$

$$2y = 26$$

$$y = \frac{26}{2}$$

$$y = 13$$

y का मान समी० (2) में रखने पर—

$$x = 3 \times 13$$

$$x = 39$$

अतः पहली संख्या 39 व दूसरी संख्या 13 है।

8. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$13x + 3y = 100 \quad \dots(1)$$

$$y - 3 = 0 \quad \dots(2)$$

समी० (2) से—

$$y = 3$$

y का मान समी० (1) में रखने पर—

$$13x + 3 \times 3 = 100$$

$$13x = 100 - 9$$

$$x = \frac{91}{13}$$

$$x = 7$$

अतः समीकरणों के हल ($x = 7$) व ($y = 3$) हैं।

9. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$3x - 5y = 20 \quad \dots(1)$$

$$6x - 10y = -40 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में 2 से गुणा करने पर—

$$2 \times (3x - 5y) = 2 \times 20$$

$$6x - 10y = 40 \quad \dots(3)$$

अब, ($6x - 10y$) का मान समी० (2) में प्रतिस्थापित करने पर—

$$40 = -40 \quad (\text{असंभव})$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{असंगत})$$

अतः समीकरण निकाय $3x - 5y = 20$, $6x - 10y = -40$ असंगत हैं।

10. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$2x - 3y + 5 = 0 \quad \dots(1)$$

$$6x - 9y + 15 = 0 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में 3 से गुणा करने पर—

$$3 \times (2x - 3y + 5) = 0 \times 3$$

$$6x - 9y + 15 = 0$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$$

यह वही समीकरण है, जो समीकरण (2) है।

अतः समी० (1) व (2) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. माना ₹ 1 के सिक्कों की संख्या = x

तथा ₹ 2 के सिक्कों की संख्या = y

$$\text{कुल सिक्के} \quad x + y = 50 \quad \dots(1)$$

$$\therefore \text{कुल धनराशि} = ₹ 75$$

$$\therefore \quad ₹ 1 \times x + ₹ 2 \times y = ₹ 75$$

$$x + 2y = 75 \quad \dots(2)$$

$$\text{समी (1) से,} \quad x + y = 50$$

$$x = 50 - y \quad \dots(3)$$

x का मान समी (2) में रखने पर

$$50 - y + 2y = 75$$

$$50 + y = 75$$

$$y = 75 - 50$$

$$y = 25$$

y का मान समी (3) में रखने पर

$$x = 50 - 25$$

$$x = 25$$

अतः ₹ 1 के सिक्कों की संख्या = 25

व ₹ 2 के सिक्कों की संख्या = 25

2. माना, कार का किराया ₹ x प्रति किमी० है।

तथा किराए का अचर भाग ₹ y है।

$$\text{तब,} \quad 13x + y = 96 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा} \quad 18x + y = 131 \quad \dots(2)$$

समी० (1) से—

$$y = 96 - 13x$$

y का यह मान समी० (2) में रखने पर—

$$18x + (96 - 13)x = 131$$

$$18x + 96 - 13x = 131$$

$$5x = 131 - 96$$

$$5x = 35$$

$$x = \frac{35}{5} = 7$$

x का मान समी० (1) में रखने पर—

$$13 \times 7 + y = 96$$

$$91 + y = 96$$

$$y = 96 - 91$$

$$y = 5$$

अब, 25 किमी० की दूरी तय करने का किराया = ₹ $25x + y$ = ₹ $25 \times 7 + 5$

$$= ₹ 175 + 5 = ₹ 180$$

अतः 25 किमी० दूरी तय करने के बाद एक आदमी को ₹ 180 देने पड़ेंगे।

3. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$2x + y = 35 \quad \dots(1)$$

$$3x + 4y = 65 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में रखने पर—

$$y = 35 - 2x \quad \dots(3)$$

y का यह मान समी० (2) में रखने पर—

$$3x + 4(35 - 2x) = 65$$

$$3x + 140 - 8x = 65$$

$$-5x = 65 - 140$$

$$-5x = -75$$

$$x = \frac{-75}{-5} = 15$$

x का मान समी० (3) में रखने पर—

$$y = 35 - 2 \times 15$$

$$y = 35 - 30$$

$$y = 5$$

अब,

$$\frac{x}{y} = \frac{15}{5} = 3$$

अतः $\frac{x}{y}$ का मान 3 है।

4. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$7x - 2y = 3 \quad \dots(1)$$

$$11x - \frac{3}{2}y = 8 \quad \dots(2)$$

समीकरणों $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से तुलना करने पर—

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{7}{11}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-3/2} = \frac{4}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore x$ और y के मान अद्वितीय हैं।

समी० (2) से—

$$-\frac{3}{8}y = 8 - 11x$$

$$y = \frac{-2}{3}(8 - 11x)$$

$$y = \frac{22x - 16}{3} \quad \dots(3)$$

y का यह मान समी० (1) में रखने पर—

$$7x - 2\left(\frac{22x - 16}{3}\right) = 3$$

$$7x - \frac{44x + 32}{3} = 3$$

$$21x - 44x + 32 = 3 \times 3$$

$$-23x = 9 - 32$$

$$-23x = -23$$

$$x = \frac{-23}{-23}$$

$$x = 1$$

x का मान समी० (3) में रखने पर—

$$y = \frac{22 \times 1 - 16}{3} = \frac{22 - 16}{3} = \frac{6}{3}$$

$$y = 2$$

अतः ($x = 1$) तथा ($y = 2$) में हल अद्वितीय हैं।

5. माना पेन्सिल का मूल्य = x

तथा रबड़ का मूल्य = y

तब रोमिला ने खरीदी ₹ $9 = 2x + 3y$

$$2x + 3y = 9 \quad \dots(1)$$

सोनाली ने खरीदा ₹ $18 = 4x + 6y$

$$4x + 6y = 18$$

$$2(2x + 3y) = 18$$

$$2x + 3y = 9 \quad \dots(ii)$$

अतः समी (1) व (2) से हमें प्राप्त होता है कि पेन्सिल तथा रबड़ का अद्वितीय मूल्य नहीं ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 3 B

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

निम्नलिखित समीकरणों को विलोपन विधि द्वारा हल कीजिए :

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ तथा $\sqrt{5}x + \sqrt{2}y = 0$

$\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ में 25 से तथा $\sqrt{5}x + \sqrt{2}y = 0$ में 4 से गुणा करने पर

$$\sqrt{10}x - \sqrt{15}y = 0 \quad \dots(1)$$

$$\sqrt{10}x + \sqrt{4}y = 0 \quad \dots(2)$$

दोनों समी० को घटाने पर

$$\sqrt{10}x - \sqrt{15}y = 0$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{10}x + \sqrt{4}y = 0 \\
 \hline
 -\sqrt{15}y - \sqrt{4}y = 0 \\
 -\sqrt{19}y = 0 \\
 \sqrt{19}y = 0 \\
 y = 0
 \end{array}$$

y का मान समी (1) में रखने पर

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{10}x - 0 = 0 \\
 \sqrt{10}x = 0 \\
 x = 0
 \end{array}$$

अतः $x = 0$ व $y = 0$ है।

$$2. \quad x - y = 2 \quad \dots(1)$$

$$2x - 3y = 1 \quad \dots(2)$$

समी (1) में 2 से गुणा करने पर

$$2x - 2y = 4 \quad \dots(3)$$

समी (3) समी (2) करने पर

$$\begin{array}{r}
 2x - 2y = 4 \\
 2x - 3y = 1 \\
 \hline
 - \quad + \quad - \\
 y = +3 \\
 y = 3
 \end{array}$$

y का मान समी (1) में रखने पर

$$\begin{array}{r}
 x - 3 = 2 \\
 x = 2 + 3 \\
 x = 5
 \end{array}$$

अतः $x = 5$ तथा $y = 3$ है।

$$3. \quad \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \quad \dots(1)$$

$$x - \frac{y}{3} = 3 \quad \dots(2)$$

समी० (2) में 2 से गुणा करने पर—

$$2x - \frac{2y}{3} = 6 \quad \dots(3)$$

समी० (1) व समी० (3) को जोड़ने पर—

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$$

$$2x - \frac{2y}{3} = 6$$

$$\frac{4x + x}{2} = 5$$

$$5x = 5 \times 2$$

$$x = \frac{10}{5} = 2$$

$$x = 2$$

x का मान समी० (1) में रखने पर—

$$\frac{2}{2} + \frac{2y}{3} = -1$$

$$1 + \frac{2y}{3} = -1$$

$$\frac{2y}{3} = -1 - 1$$

$$y = \frac{-2 \times 3}{2} = -3$$

$$y = -3$$

अतः ($x = 2$) तथा ($y = -3$)

$$4. \quad 2x + 3y = 10 \quad \dots(1)$$

$$5x - y = 8 \quad \dots(2)$$

समी (2) में (3) से गुणा करने पर

$$15x - 3y = 24 \quad \dots(3)$$

समी (3) व (1) को जोड़ेंगे।

$$15x - 3y = 24$$

$$2x + 3y = 10$$

$$\begin{array}{r} + \quad + \quad + \\ \hline \end{array}$$

$$17x = 34$$

$$x = \frac{34}{17}$$

$$x = 2$$

x का मान समी (1) में रखने पर,

$$2 \times 2 + 3y = 10 \quad \Rightarrow \quad 4 + 3y = 10$$

$$3y = 10 - 4 \quad \Rightarrow \quad 3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

अतः $x = 2$ व $y = 2$ है।

5. दिया है, $\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 3$ समी० में यदि $x = 2$ हो, तब

$$\frac{y+5x}{xy} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{y+5 \times 2}{2y} = 3$$

$$\frac{y+10}{2y} = 3 \quad \Rightarrow \quad y+10 = 2y \times 3$$

$$y+10 = 6y \quad \Rightarrow \quad 6y - y = 10$$

$$5y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

विलोपन विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्मों को हल कीजिए :

1. $x + y = 8xy$ तथा $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 10$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 10$ को सरल करेंगे

$$\frac{y+2x}{xy} = 10$$

$$y+2x = 10xy \quad \dots(1)$$

समी $x + y = 8xy$ में 2 से गुणा करके (1) से घटाने पर,

$$2x+2y = 16xy \quad \dots(2)$$

$$2x + y = 10xy \quad \dots(1)$$

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$y = 6xy$$

$$x = \frac{y}{6y}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

x का मान समी० $x + y = 8xy$ में रखेंगे।

$$\frac{1}{6} + y = 8xy$$

$$1 + 6y = 48xy$$

$$1 + 6y = 48 \times \frac{1}{6} y$$

$$1 + 6y = 8y$$

$$1 = 8y - 6y$$

$$1 = 2y$$

$$y = \frac{1}{2}$$

अतः $x = \frac{1}{6}$ व $y = \frac{1}{2}$ है।

$$3. \quad 3x - 4y = 1 \quad \dots(1)$$

$$4x - 3y = 6 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में 4 से तथा समी० (2) में 3 से गुणा करने पर—

$$12x - 16y = 4 \quad \dots(3)$$

$$12x - 9y = 18 \quad \dots(4)$$

समी० (4) में से समी० (3) को घटाने पर—

$$12x - 9y = 18$$

$$12x - 16y = 4$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ \hline 7y = 14 \\ y = \frac{14}{7} = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

y का मान समी० (1) में रखने पर—

$$3x - 4 \times 2 = 1$$

$$3x - 8 = 1$$

$$3x = 1 + 8$$

$$x = \frac{9}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

अतः $(x = 3)$ तथा $(y = 2)$

$$4. \quad x + y = 5 \quad \dots(1)$$

$$2x - 3y = 4 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में (3) से गुणा करने पर—

$$3x + 3y = 15 \quad \dots(3)$$

समी० (2) व समी० (3) को जोड़ने पर—

$$2x - 3y = 4$$

$$3x + 3y = 15$$

$$\hline 5x = 19$$

$$x = \frac{19}{5}$$

x का मान समी० (1) में रखने पर—

$$\frac{19}{5} + y = 5$$

$$y = 5 - \frac{19}{5} = \frac{25 - 19}{5} = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{6}{5}$$

अतः $\left(x = \frac{19}{5}\right)$ तथा $\left(y = \frac{6}{5}\right)$

$$5. \quad ax + by = a - b \quad \dots(1)$$

$$bx - ay = a + b \quad \dots(2)$$

समी० (1) में a से तथा समी० (2) में b से गुणा करके जोड़ने पर—

$$a^2x + aby = a^2 - ab$$

$$b^2x - aby = ab + b^2$$

$$\hline a^2x + b^2x = a^2 + b^2$$

$$x(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)} = 1$$

$$x = 1$$

x का मान समी० (2) में रखने पर—

$$b \times 1 - ay = a + b$$

$$-ay = a + b - b$$

$$y = \frac{a}{-a} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

अतः $(x = 1)$ तथा $(y = -1)$

$$6. \quad 4x + 5y = 7 \quad \dots(1)$$

$$2x + y = 2 \quad \dots(2)$$

समी (2) में 2 से गुणा करने पर

$$4x + 2y = 4 \quad \dots(3)$$

समी (1) में से समी (3) को घटाने पर

$$4x + 5y = 7$$

$$4x + 2y = 4$$

$$\hline - \quad - \quad -$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

y का मान समी (1) में रखने पर

$$4x + 5 \times 1 = 7$$

$$4x + 5 = 7$$

$$4x = 7 - 5$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

अतः $x = \frac{1}{2}$ तथा $y = 1$ है।

7. माना वह भिन्न $\frac{x}{y}$ है तब

यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे तब,

$$\frac{x+1}{y-1} = 1$$

$$x+1 = y-1$$

$$x - y = -1 - 1$$

$$x - y = -2$$

...(2)

अब यदि हम हर में 1 जोड़ दे

तब,
$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$$2x = y+1$$

$$2x - y = 1$$

...(3)

समी (1) में 2 से गुणा करने पर

$$2x - 2y = -4$$

...(3)

समी (3) में से समी (2) को घटाने पर

$$2x - 2y = -4$$

$$2x - y = 1$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$-y = -5$$

$$y = 5$$

y का मान समी (1) में रखने पर

$$x - 5 = -2$$

$$x = -2 + 5$$

$$x = 3$$

हमने माना था भिन्न $\frac{x}{y}$, अब x व y का मान इसमें रखने पर $\frac{3}{5}$, प्राप्त होती है।

अतः वह भिन्न $\frac{3}{5}$ है।

8. माना वह भिन्न $\frac{x}{y}$ है तब,

प्रश्नानुसार, भिन्न के अंश व हर दोनों में से 1 घटाने पर

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{2}$$

$$2(x-1) = y-1$$

$$2x - 2 = y - 1$$

$$2x - y = -1 + 2$$

$$2x - y = 1$$

...(1)

यदि अंश व हर दोनों में 1 जोड़े तब,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{2}{3}$$

$$3x + 3 = 2y + 2$$

$$3x - 2y = 2 - 3$$

$$3x - 2y = -1$$

...(2)

समी (1) में 3 से व समी (2) में 2 से गुणा करेंगे।

$$6x - 3y = 3$$

...(3)

$$6x - 4y = -2$$

...(4)

समी (3) व समी (4) को घटायेगे।

$$6x - 3y = 3$$

$$6x - 4y = -2$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad + \\ \hline y = 5 \end{array}$$

y का मान समी (1) में रखने पर

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 1 + 5$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

हमने भिन्न को $\frac{x}{y}$ के रूप में माना था। अब x व y के मान इस भिन्न में रखने पर।

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

अतः वह भिन्न $\frac{3}{5}$ है।

9. दिया है, दो संख्याओं का अनुपात = 5 : 6

माना वह संख्याएँ $5x$ व $6x$ है

प्रत्येक संख्या में से 8 घटाने पर

$$5x - 8 : 6x - 8 = 4 : 5$$

$$\frac{5x - 8}{6x - 8} = \frac{4}{5}$$

$$5(5x - 8) = 4(6x - 8)$$

$$25x - 40 = 24x - 32$$

$$25x - 24x = -32 + 40$$

$$x = 8$$

हमने माना या वे संख्या $5x$ व $6x$ थी।

तब x का मान रखने पर

$$5x = 5 \times 8 = 40$$

तथा

$$6x = 6 \times 8 = 48$$

अतः वे संख्याएँ 40 तथा 48 हैं।

10. माना सलीम की वर्तमान आयु $= x$

तथा उसकी पुत्री की वर्तमान आयु $= y$

दो वर्ष पहले,

$$x - 2 = 3(y - 2)$$

$$x - 2 = 3y - 6$$

$$x - 3y = -6 + 2$$

$$x - 3y = -4$$

...(1)

6 वर्ष बाद,

$$x + 6 = 2(y + 6) + 4$$

$$x + 6 = 2y + 12 + 4$$

$$x + 6 = 2y + 16$$

$$x - 2y = 16 - 6$$

$$x - 2y = 10$$

...(2)

समी (1) व (2) को घटाने पर

$$x - 3y = -4$$

$$x - 2y = 10$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$-y = -14$$

$$y = 14$$

y का मान समी में (1) में रखने पर

$$x - 3 \times 14 = -4$$

$$x - 42 = -4$$

$$x = -4 + 42$$

$$x = 38$$

हमने सलीम की वर्तमान आयु को x तथा उसकी पुत्री की वर्तमान आयु को y माना था।

अतः सलीम की वर्तमान आयु $= 38$ वर्ष

तथा सलीम की बेटी की आयु $= 14$ वर्ष हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. दिए गए समीकरण निम्न हैं—

$$3x - 5y = 20$$

...(1)

$$7x + 2y = 17$$

...(2)

समीकरणों को $a_1x + b_1y = c_1$ तथा $a_2x + b_2y = c_2$ से तुलना करने पर—

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{7}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{20}{17}$$

∴ दोनों समीकरणों के हल अद्वितीय हैं।

अब, समी० (1) में 2 से तथा समी० (2) में 5 से गुणा करके जोड़ने पर—

$$\begin{aligned} 6x - 10y &= 40 \\ 35x + 10y &= 85 \\ 41x &= 125 \\ x &= \frac{125}{41} \end{aligned}$$

x का मान समी० (1) में रखने पर—

$$\begin{aligned} x \times \frac{125}{41} - 5y &= 20 \\ \frac{375}{41} - 5y &= 20 \\ 5y &= \frac{375}{41} - 20 \\ 5y &= \frac{375 - 820}{41} \\ y &= \frac{-445}{41 \times 5} \Rightarrow y = \frac{-89}{41} \end{aligned}$$

अतः $\left(x = \frac{125}{41}\right)$ तथा $\left(y = \frac{-89}{41}\right)$ अद्वितीय हल हैं।

2. रैखिक समीकरण युग्म है—

$$2x + 3y = 4$$

$$2x + 3y - 4 = 0 \quad \dots(1)$$

और

$$(k+2)x + 6y = 2k+2$$

$$(k+2)x + 6y - 2k - 2 = 0 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) की तुलना क्रमशः $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर

$$a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = -4, a_2 = (k+2), b_2 = 6, c_2 = -2k-2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{k+2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

(अनन्त हल के लिए)

$$\frac{2}{k+2} = \frac{1}{2}$$

$$4 = k+2$$

$$k = 4 - 2$$

$$k = 2$$

3. माना, एक कुर्सी व एक मेज का मूल्य क्रमशः x तथा y हैं।

$$\text{तब,} \quad 4x + 3y = ₹ 210 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा,} \quad 5x + 2y = ₹ 175 \quad \dots(2)$$

समी० (1) में 2 से तथा समी० (2) में 3 से गुणा करने पर—

$$8x + 6y = ₹ 420 \quad \dots(3)$$

$$15x + 6y = ₹ 525 \quad \dots(4)$$

समी० (4) में से समी० (3) को घटाने पर—

$$15x + 6y = ₹ 525$$

$$8x + 6y = ₹ 420$$

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ 7x = ₹ 105 \end{array}$$

$$x = ₹ \frac{105}{7}$$

$$x = ₹ 15$$

x का मान समी० (1) में रखने पर—

$$4 \times ₹ 15 + 3y = ₹ 210$$

$$₹ 60 + 3y = ₹ 210$$

$$3y = ₹ (210 - 60)$$

$$y = ₹ \frac{150}{3}$$

$$y = ₹ 50$$

अतः एक कुर्सी का मूल्य = ₹ 15

तथा एक मेज का मूल्य = ₹ 50 है।

4. माना दो व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः ₹ $9x$ तथा ₹ $7x$ है तथा उनके खर्चे क्रमशः ₹ $4y$ तथा ₹ $3y$ हैं।

$$\text{प्रश्नानुसार,} \quad 9x - 4y = 2000 \quad \dots(1)$$

$$7x - 3y = 2000 \quad \dots(2)$$

समी० (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा करके घटाने पर,

$$27x - 12y = 6000$$

$$28x - 12y = 8000$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$-x = -2000 \Rightarrow x = 2000$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$9 \times 2000 - 4y = 2000$$

$$-4y = 2000 - 18000$$

$$-4y = -16000$$

$$y = 4000$$

अतः पहले व्यक्ति की मासिक आय = ₹ $9x$ = ₹ 9×2000 = ₹ 18000
 तथा दूसरे व्यक्ति की मासिक आय = ₹ $7x$ = ₹ 7×2000 = ₹ 14000

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (d) 3. (b) 4. (b) 5. (d) 6. (c) 7. (b) 8. (b)
 9. (d) 10. (b)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (a) 2. (c) 3. (d) 4. (b)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र में दिया है; घर की कुल लम्बाई = 15 मीटर

$$\text{तब } x + 2 + y = 15 \Rightarrow x + y = 13$$

यह भी दिया है, कि

दो बेडरूम + रसोई का क्षेत्रफल = 95 वर्ग मीटर

$$2(5 \times x) + 5 \times y = 95$$

$$10x + 5y = 95 \Rightarrow 2x + y = 19$$

अतः दो रेखिक समीकरणों का युग्म $x + y = 13$ तथा $2x + y = 19$ होगा।

2. चित्र से, घर का क्षेत्रफल एक आयताकार आकृति है।

तब घर के ले-आउट की बाहरी सीमा की लम्बाई = आयत का परिमाप

$$= 2 \times (\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई})$$

$$= 2 \times (15 + 12) = 2 \times 27 = 54 \text{ मीटर}$$

अतः घर के ले-आउट की बाहरी सीमा की लम्बाई 54 मीटर है।

3. हमें क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए 'x' तथा 'y' के मान की आवश्यकता होगी।

समीकरण $x + y = 13$ तथा $2x + y = 19$ दो प्राप्त समीकरण हैं।

अब $x + y = 13 \Rightarrow y = 13 - x$ का मान $2x + y = 19$ में रखने पर,

$$2x + 13 - x = 19 \Rightarrow x = 19 - 13$$

$\Rightarrow$

$$x = 6$$

$x = 6$ को समीकरण $x + y = 13$ में रखने पर,

$$6 + y = 13 \Rightarrow y = 7$$

अतः $x = 6$ तथा $y = 7$ है।

अब, बेडरूम का क्षेत्रफल = $5 \times x = 5 \times 6 = 30$ वर्ग मीटर

रसोई का क्षेत्रफल = $5 \times y = 5 \times 7 = 35$ वर्ग मीटर

अतः बेडरूम तथा रसोई का क्षेत्रफल क्रमशः 30 वर्ग मीटर तथा 35 वर्ग मीटर है।

4. लिविंग रूम का क्षेत्रफल = 15×7 (आयत का क्षेत्रफल) – बेडरूम का क्षेत्रफल

$$= 15 \times 7 - 30 = 105 - 30 = 75 = 75 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः लिविंग रूम का क्षेत्रफल 75 वर्ग मीटर है।

5. हम जानते हैं; रसोई का क्षेत्रफल = 35 वर्ग मीटर

दिया है,

रसोई में 1 वर्ग मीटर में टाइल बिछाने का मूल्य = ₹ 50

अतः रसोई में 35 वर्ग मीटर के क्षेत्रफल में टाइल बिछाने में कुल लागत = ₹ 50×35
= ₹ 1750

कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

1. (b) 2. (d) 3. (d) 4. (c) 5. (c)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(iii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iv)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न :

1. सत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न (HOTS)

1. माना नाविक की (स्थिर जल में) चाल p है और धारा की चाल q है।

तब धारा प्रवाह की दिशा में चाल

$$p + q = \frac{\text{धारा प्रवाह की दिशा में चली गयी दूरी}}{\text{लिया गया समय}}$$

$$p + q = \frac{8}{40/60} = \frac{8 \times 60}{40} = 12 \text{ किमी/घंटा}$$

अब लौटते समय धारा के प्रतिकूल चाल

$$p - q = \frac{\text{चली गयी दूरी}}{\text{समय}} = \frac{8}{1} = 8 \text{ किमी/घंटा}$$

अब

$$p + q = 12 \text{ तथा } p - q = 8 \text{ हो हल करने पर,}$$

$$p + q = 12 \quad \dots(1)$$

$$p - q = 8 \quad \dots(2)$$

$$2p = 20 \Rightarrow p = 10$$

$p = 10$ समी (1) में रखने पर,

$$10 + q = 12$$

$$\Rightarrow q = 2$$

अतः नाविक की स्थिर जल में चाल 10 किमी/घंटा तथा धारा की चाल 2 किमी/घंटा होगी।

2. माना मेज का क्रय मूल्य x रुपये तथा कुर्सी का क्रय मूल्य y रुपये है।

10% लाभ पर मेज का विक्रय मूल्य = ₹ $(x + x$ का 10%)

$$= ₹ \left(x + \frac{10}{100}x \right) = ₹ \frac{110}{100}x$$

25% लाभ पर कुर्सी का विक्रय मूल्य = ₹ $(y + y$ का 25%)

$$= ₹ \left(y + \frac{25}{100}y \right) = ₹ \frac{125}{100}y$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{110x}{100} + \frac{125y}{100} = 1050 \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{जब मेज को 25\% लाभ पर बेचा जाता है, तो इसका विक्रय मूल्य} &= ₹ \left(x + \frac{25}{100}x \right) \\ &= ₹ \frac{125}{100}x \end{aligned}$$

जब कुर्सी को 10% के लाभ पर बेचा जाता है, तो इसका विक्रय मूल्य

$$= ₹ \left(y + \frac{10}{100}y \right) = ₹ \frac{110}{100}y$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{125}{100}x + \frac{110}{100}y = 1065 \quad \dots(2)$$

हमें, समीकरण (1) व (2) से प्राप्त होता है,

$$110x + 125y = 105000$$

$$125x + 110y = 106500$$

जोड़ने व घटाने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$235x + 235y = 211500$$

$$15x - 15y = 1500$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 900 \quad \dots(3)$$

$$x - y = 100 \quad \dots(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$x = 500 \text{ तथा } y = 400$$

अतः मेज का क्रय मूल्य 500 रुपये तथा कुर्सी का क्रय मूल्य 400 रुपये है।

3. माना रेलगाड़ी द्वारा तय की गयी दूरी x किमी तथा इसकी नियत चाल y किमी प्रति घण्टा है।

$$\text{तब रेलगाड़ी द्वारा यात्रा में लिया गया समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{x}{y} \text{ घंटे}$$

अब प्रथम शर्तानुसार,

$$\frac{x}{y+10} = \frac{x}{y} - 2$$

$$xy = xy + 10x - 2y(y+10)$$

$$0 = 10x - 2y^2 - 20y$$

$$2y^2 = 10x - 20y \quad \dots(1)$$

द्वितीय शर्तानुसार

$$\frac{x}{y-10} = \frac{x}{y} + 3$$

$$xy = xy - 10x + 3y(y-10)$$

$$0 = -10x + 3y^2 - 30y$$

$$3y^2 = 10x + 30y \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर,

$$y^2 = 50y \quad \Rightarrow \quad y = 50$$

$y = 50$, समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{50+10} = \frac{x}{50} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{60} = \frac{x}{50} - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{50} - \frac{x}{60} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{300} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 600$$

अतः रेलगाड़ी द्वारा तय की दूरी 600 किमी है।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (b) दिये गये समीकरण है—

$$x + 3y = 6 \quad \dots(1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad \dots(2)$$

समी (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$x + 3y = 6$$

$$2x - 3y = 12$$

$$3x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

$x = 6$ को समी (1) में रखने पर,

$$6 + 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

अतः स्लेडो की धूरी बिन्दु (6, 0) है।

2. (c) दिये गये समी $x + 3y = 6$ में $x = 0$ रखने पर,

$$0 + 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$\therefore$ समी $x + 3y = 6$, y -अक्ष को (0, 2) पर प्रतिच्छेद करती है।

अब दिये गये समी $2x - 3y = 12$ में $x = 0$ रखने पर,

$$2(0) - 3y = 12 \Rightarrow y = -4$$

$\therefore$ समी $2x - 3y = 12$, y -अक्ष को $(0, -4)$ पर प्रतिच्छेद करती है।

अतः $x + 3y = 6$ व $2x - 3y = 12$, y -अक्ष को क्रमशः $(0, 2)$ व $(0, -4)$ पर प्रतिच्छेद करती है।

3. (d) समी $x + 2y - 8 = 0$ तथा $2x + 4y = 16$ की तुलना क्रमशः $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ व $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ करने पर,

$$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -8 \text{ और } a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -16$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः समी $x + 2y - 8 = 0$ तथा $2x + 4y = 16$ के अपरिमित हल होंगे।

5. (d) यदि दो चर वाली रेखीक समी $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ में,

$$\frac{a_1}{b_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ या } \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

है तो ये समीकरण प्रतिच्छेद करने वाली या सम्पाती होती है।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (b) शहर A में ऑटो रिक्शा का निश्चित शुल्क = ₹ x

1 किमी चलने के लिए शुल्क = ₹ y

10 किमी यात्रा के लिए शुल्क = ₹ $10y$

अतः कुल शुल्क; $x + 10y = 75$

इसी प्रकार,

15 किमी यात्रा के लिए शुल्क = ₹ $15y$

तथा 15 किमी यात्रा के लिए भुगतान किया।

अतः रेखीक समीकरण $x + 10y = 75$ तथा $x + 15y = 110$ होगी।

2. (c) सबसे पहले हमें शहर A के लिए x व y के मान ज्ञात करने होंगे, जिसके लिए समीकरण

$$x + 15y = 110 \quad \dots(1)$$

$$x + 10y = 75 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर,

$$x = 5 \text{ तथा } y = 7$$

अब शहर A 50 किमी की दूरी तय करने में भुगतान = $x + 50y$

$$= 5 + 50 \times 7 = ₹ 355$$

अतः शहर A में 50 किमी की दूरी तय करने के लिए भुगतान ₹ 355 होगा।

3. (a) शहर B में, ऑटो रिक्शा का निश्चित मूल्य ₹ x तथा चलने का शुल्क ₹ y प्रति किमी है।

8 किमी की यात्रा के लिए भुगतान किया गया शुल्क; $x + 8y = 91$

तथा 14 किमी की यात्रा के लिए शुल्क; $x + 14y = 145$

अतः स्थिति-2 को दर्शाने के लिए समीकरण

$$x + 8y = 91 \text{ तथा } x + 14y = 145 \text{ होगी।}$$

4. (b) शहर 'B' के लिए प्राप्त समीकरण,

$$x + 14y = 145 \quad \dots(1)$$

$$x + 8y = 91 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए,

$$x = 19 \text{ तथा } y = 9$$

एक व्यक्ति को शहर B में 30 किमी दूरी तय करने के लिए भुगतान $= x + 30y$

$$= 19 + 30 \times 9 = 19 + 270 = ₹ 289$$

अतः व्यक्ति को शहर B में 30 किमी दूरी तय करने के लिए ₹ 289 का भुगतान करना होगा।



4

द्विघात समीकरण

(Control and Coordination)

प्रश्नावली 4 A

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. किसी द्विघात समीकरण $P(x) = 0$ के पदों को घातों के घटते क्रम अथवा बढ़ते क्रम में लिखने पर प्राप्त समीकरण, मानक द्विघात समीकरण कहलाती है।

चर x में एक द्विघात समीकरण का व्यापक रूप निम्नलिखित है—

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।

(i) $9x + 6x^2 - 1 = 0$

द्विघात समीकरण का व्यापक रूप

$$6x^2 + 9x - 1 = 0$$

(ii) $5x^2 + 4x = 1$

द्विघात समीकरण का व्यापक रूप

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

(iii) $9y^2 = 6y - 1$

द्विघात समीकरण का व्यापक रूप

$$9y^2 - 6y + 1 = 0$$

2. द्विघात समीकरण-

(i) दिया है,

$$\begin{aligned}(x-1)(x-1) &= (x+2)(x-5) \\ x^2 - x - x + 1 &= x^2 + 2x - 5x - 10 \\ x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 3x - 10 \\ 3x - 2x &= -10 - 1 \\ x &= -11\end{aligned}$$

$$x + 11 = 0$$

चूँकि यह समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है।

अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(ii) दिया है,

$$\begin{aligned}2x^2 - 5x &= 2x - 3 \\ 2x^2 - 5x - 2x + 3 &= 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 &= 0\end{aligned}$$

चूँकि यह समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

अतः दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(iii) दिया है,

$$\begin{aligned}(3x+5)(x+2) &= (x+2)(2x-1) \\ 3x^2 + 6x + 5x + 10 &= 2x^2 + 4x - x - 2 \\ 3x^2 + 11x + 10 &= 2x^2 + 3x - 2 \\ 3x^2 - 2x^2 + 11x - 3x + 10 + 2 &= 0 \\ x^2 + 8x + 12 &= 0\end{aligned}$$

चूँकि यह समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

(iv) दिया है,

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= 3 \\ \frac{x^2 + 1}{x} &= 3 \\ x^2 + 1 &= 3x \\ x^2 - 3x + 1 &= 0\end{aligned}$$

चूँकि समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(v) दिया है,

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+1} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+2)(x+1)+(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2x + x + 2 + x^2 - 2x - 2x + 4}{x^2 - 2x + x - 2} = \frac{5}{2}$$

$$2 \times (2x^2 - x + 6) = 5 \times (x^2 - x - 2)$$

$$4x^2 - 2x + 12 = 5x^2 - 5x - 10$$

$$5x^2 - 4x^2 - 5x + 2x - 10 - 12 = 0$$

$$x^2 - 3x - 22 = 0$$

चूँकि यह समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

3. $5x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 8x + 7$
 $5x^2 + 6x + 9 - 4x^2 - 8x - 7 = 0$ (पक्षान्तरण)
 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $x^2 + (-2x) + 2 = 0$

उक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप की है।

अतः दी गई समीकरण,

द्विघात समीकरण है।

इति सिद्धम्

4. $3x^2 - 4x + 2 = 2x^2 - 2x + 4$
 $3x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$ (पक्षान्तरण करने पर)
 $x^2 - 2x - 2 = 0$
 $x^2 + (-2x) + (-2) = 0$

उक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप की है।

अतः दी गई समीकरण, द्विघात समीकरण है, क्योंकि यहाँ x^2 का गुणांक शून्य नहीं है।

5. $(x+1)^2 = 2(x-3)$
 $x^2 + 1 + 2x = 2x - 6$
 $x^2 + 1 + 2x - 2x + 6$ (पक्षान्तरण करने पर)
 $x^2 + 7 = 0$

अतः यह द्विघात समीकरण है।

6. $x + 9 = 0$ द्विघात समीकरण नहीं है, क्योंकि यहाँ x^2 का गुणांक शून्य है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. माना दोनों वर्गों की भुजाएँ x व y है। तब प्रश्नानुसार,

दोनों वर्गों के क्षेत्रफल का योग $= x^2 + y^2 = 468$... (i)

तथा परिमाप का अन्तर $= 4x - 4y = 24$

$x - y = 6$... (ii)

$$x = 6 + y$$

x का मान समी (i) में रखने पर—

$$(6 + y)^2 + y^2 = 468$$

$$36 + y^2 + 12y + y^2 + 468$$

$$2y^2 + 12y + 36 = 468$$

$$2y^2 + 12y = 468 - 36$$

$$2y^2 + 12y = 432$$

$$2y^2 + 12y - 432 = 0$$

$$y^2 + 6y - 216 = 0$$

$$y^2 + 18y - 12y - 216 = 0$$

$$y(y + 18) - 12(y + 18) = 0$$

$$(y + 18)(y - 12)$$

$$y = -18 \text{ या } y = 12$$

अतः दूरी (भुजा) कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती, अतः $y = 12$ है।

y का मान समी (ii) में रखने पर

$$x - 12 = 6$$

$$x = 18$$

अतः एक वर्ग की भुजा 12 मीटर तथा दूसरे की 18 मी है।

अतः हमें एक वर्ग की भुजा x तथा दूसरे वर्ग की भुजा y मिलती है।

हम इसे द्विघात समीकरण के रूप में $x^2 + 6x - 216 = 0$ लिख सकते हैं।

2. माना अभीष्ट संख्या $= x$ है।

तब प्रश्नानुसार—

$$x^2 = 4x + 21$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

अतः संख्या द्विघात समीकरण $x^2 - 4x - 21 = 0$ की सन्तुष्ट करती है।

3. माना, पहली संख्या $= x$ है

तब, दूसरी क्रमागत धनात्मक संख्या $= x + 1$

प्रश्नानुसार, दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल $= x(x + 1) = 306$

$$x^2 + x = 306$$

अतः द्विघात समी $x^2 + x - 306 = 0$

तथा पूर्णांक x है।

4. माना, त्रिभुज का आधार $= x$ इकाई है।

तब, त्रिभुज का लम्ब $= (2x - 1)$ इकाई

$\therefore$ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

$$\therefore (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2$$

$$(2x-1)^2 + (x)^2 = (17)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 + x^2 = 289$$

$$5x^2 - 4x + 1 - 289 = 0$$

$$5x^2 - 4x - 288 = 0$$

अतः समकोण त्रिभुज का आधार समीकरण $5x^2 - 4x - 288 = 0$ को सन्तुष्ट करती है।

5. माना, पहली संख्या $= x$ है

तब, दूसरी क्रमागत सम संख्या $= x + 1$

प्रश्नानुसार, दो क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल $= 528$

$$\therefore x \times (x + 2) = 528$$

$$x^2 + 2x = 528$$

$$x^2 + 2x - 528 = 0$$

अतः दोनों क्रमागत सम संख्या समीकरण $x^2 + 2x - 528 = 0$ को सन्तुष्ट करती हैं।

6. दिया है, राधे की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

तब, उसके मित्र की वर्तमान आयु $= (x + 3)$ वर्ष

प्रश्नानुसार—

$$x \times (x + 3) = 88$$

$$x^2 + 3x = 88$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

अतः राधे व उसके मित्र की वर्तमान आयु, समीकरण $x^2 + 3x - 88 = 0$ को सन्तुष्ट करती है।

7. माना, बस की वर्तमान चाल $= x$ किमी/घण्टा है।

$$\therefore 300 \text{ किमी० की दूरी को तय करने में लगा समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{300}{x}$$

अब, बस की चाल में 10 किमी/घण्टा की वृद्धि करने पर 300 किमी० दूरी तय करने में

$$\text{लगा समय} = \frac{300}{(x + 10)}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{(x + 10)} = 1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(x + 10)} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{x + 10 - x}{x(x + 10)} = \frac{1}{300}$$

$$\frac{10}{x^2 + 10x} = \frac{1}{300}$$

$$10 \times 300 = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x = 3000$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

अतः बस की वर्तमान चाल समीकरण $x^2 + 10x - 3000 = 0$ की सन्तुष्ट करती है।

8. माना, समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $= x$ इकाई है।

तब, त्रिभुज का आधार $= (2x + 2)$ इकाई

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 30$ वर्ग इकाई

$\therefore \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = 30$ वर्ग इकाई

$$\frac{1}{2} \times (2x + 2) \times x = 30$$

$$(x + 1) \times x = 30$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

अतः समकोण त्रिभुज की ऊँचाई, समीकरण $x^2 + x - 30 = 0$ को सन्तुष्ट करती है।

9. माना, तीन क्रमागत संख्याएँ $(x - 1)$, x तथा $(x + 1)$ हैं।

तब, प्रश्नानुसार—

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 77$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 77$$

$$3x^2 + 2 = 77$$

$$3x^2 + 2 - 77 = 0$$

$$3x^2 - 75 = 0$$

अतः तीनों क्रमागत संख्याएँ, समीकरण $3x^2 - 75 = 0$ को सन्तुष्ट करती हैं।

10. माना, अभीष्ट संख्या $= x$ है।

तब, प्रश्नानुसार—

$$x + x^2 = 240$$

$$x^2 + x - 240 = 0$$

अतः अभीष्ट संख्या समीकरण $x^2 + x - 240 = 0$ को सन्तुष्ट करती है।

प्रश्नावली-4B

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $(x - 2)(x + 4) = 0$

यदि $(x - 2) = 0$, तब $(x = 2)$

यदि $(x + 4) = 0$ तब $(x = -4)$

अतः $(x = 2)$ तथा $(x = -4)$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

2. $(3x + 7)(2x - 3) = 0$

यदि $(3x + 7) = 0$, तब $3x = -7$

$$\text{तथा } \left(x = \frac{-7}{3}\right)$$

यदि $(2x - 3) = 0$, तब $2x = 3$

$$\text{तथा } \left(x = \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{अतः } \left(x = \frac{-7}{3}\right) \text{ तथा } \left(x = \frac{3}{2}\right)$$

दिए गए समीकरण के हल हैं।

$$3. x^2 = 3x + 28$$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$x^2 - 7x + 4x - 28 = 0$$

$$x(x - 7) + 4(x - 7) = 0$$

$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

यदि $x - 7 = 0$, तब $x = 7$

यदि $x + 4 = 0$, तब $x = -4$

अतः $(x = 7)$ तथा $(x = -4)$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

$$4. x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

अतः $x = 1$ या -1 है।

$$5. (x + 2)(x + 3) = 5x + 7$$

$$x^2 + 2x + 3x + 6 = 5x + 7$$

$$x^2 + 5x - 5x + 6 - 7 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

यदि $x - 1 = 0$, तब $x = 1$

यदि $x + 1 = 0$, तब $x = -1$

अतः $(x = 1)$ तथा $(x = -1)$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

$$6. (x - 5)^2 = 36$$

$$x^2 - 10x + 25 = 36$$

$$x^2 - 10x + 25 - 36 = 0$$

$$x^2 - 10x - 11 = 0$$

$$x^2 - 11x + x - 11 = 0$$

$$x(x - 11) + 1(x - 11) = 0$$

$$(x-11)(x+1)=0$$

यदि $x-11=0$, तब $x=11$

यदि $x+1=0$, तब $x=-1$

अतः ($x=11$) तथा ($x=-1$) दिए गए समीकरण के हल हैं।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$

$$x(x-5) + 2(x-5) = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0$$

$$x = 5 \quad \text{व} \quad x = -2$$

2. $2x^2 + x - 6 = 0$

$$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$$

$$2x(x+2) - 3(x+2) = 0$$

$$(2x-3)(x+2) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{या} \quad x = -2$$

3. $100x^2 - 20x + 1 = 0$

$$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$$

$$10x(10x-1) - 1(10x-1) = 0$$

$$(10x-1)(10x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$$

4. $x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + 1 = 0$

$$x^2 - \frac{9}{b}x - \frac{b}{a}x + \frac{ab}{ab} = 0$$

$$x\left(x - \frac{9}{b}\right) - \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{b}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0$$

यदि $\left(x - \frac{a}{b}\right) = 0$, तब $x = \frac{a}{b}$

यदि $\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0$, तब $x = \frac{b}{a}$

अतः $\left(x = \frac{a}{b}\right)$ तथा $\left(x = \frac{b}{a}\right)$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

$$5. \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2}x(x + \sqrt{2}) + 5(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \frac{-5}{\sqrt{2}}, x = -\sqrt{2}$$

$$6. 2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$$

$$(4x - 1)(4x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$$

$$7. a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$a^2x^2 - 2abx - abx + 2b^2 = 0$$

$$ax(ax - 2b) - b(ax - 2b) = 0$$

$$(ax - 2b)(ax - b) = 0$$

$$\text{यदि } ax - 2b = 0, \text{ तब } x = \frac{2b}{a}$$

$$\text{यदि } ax - b = 0, \text{ तब } x = \frac{b}{a}$$

$$8. 6 + x - 2x^2 = 0 \Rightarrow -(2x^2 - x - 6) = 0$$

$$2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) + 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(2x + 3) = 0$$

$$\text{यदि } x - 2 = 0, \text{ तब } x = 2$$

$$\text{यदि } 2x + 3 = 0, \text{ तब } 2x = -3 \text{ तथा } x = \frac{-3}{2}$$

अतः $(x = 2)$ तथा $\left(x = \frac{-3}{2}\right)$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. माना वो दो संख्याएँ x व y हैं तब प्रश्नानुसार,

$$x + y = 27$$

...(i)

$$x \times y = 182$$

...(ii)

$$x = \frac{182}{y}$$

x का मान समी (i) में रखने पर

$$\frac{812}{y} + y = 27$$

$$\frac{182 + y^2}{y} = 27$$

$$182 + y^2 = 27y$$

$$y^2 - 27y + 182 = 0$$

$$y^2 - 14y - 13y + 182 = 0$$

$$y(y - 14) - 13(y - 14) = 0$$

$$(y - 13)(y - 14) = 0$$

$y = 13$ व $y = 14$ है।

y के दोनों मान समी (ii) में रखने पर

$$x = \frac{182}{13} \text{ तथा } \frac{182}{14}$$

$$x = 14 \text{ व } x = 13$$

अतः वो दोनों संख्याएँ 13 व 14 है।

2. माना, रेलगाड़ी की चाल $= x$ किमी/घण्टा है।

$$\therefore \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\therefore \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

प्रश्नानुसार—

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{x+15} = \frac{1}{2}$$

$$90 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+15-x}{x(x+15)} = \frac{1}{2 \times 90}$$

$$\frac{15}{x^2 + 15x} = \frac{1}{180}$$

$$15 \times 180 = x^2 + 15x$$

$$x^2 + 15x = 2700$$

$$x^2 + 15x - 2700 = 0$$

$$x^2 + 60x - 45x - 2700 = 0$$

$$x(x + 60) - 45(x + 60) = 0$$

$$(x + 60)(x - 45) = 0$$

यदि $x + 60 = 0$, तब $x = -60$ (अमान्य)

यदि $x - 45 = 0$, तब $x = 45$

अतः रेलगाड़ी की वास्तविक चाल कुल 45 किमी/घण्टा है।

3. माना समकोण त्रिभुज का आधार x सेमी है।

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई $= (x - 7)$ सेमी

कर्ण $= 13$ सेमी

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{ऊँचाई})^2$$

$$(13)^2 = (x)^2 + (x - 7)^2$$

$$169 = x^2 + x^2 + 49 - 14x$$

$$169 - 49 = 2x^2 - 14x$$

$$2x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$x(x - 12) + 5(x - 12) = 0$$

$$(x - 12)(x + 5) = 0$$

$x = 12$ है।

जब आधार $= 12$ सेमी तब ऊँचाई $x + 7$

$$= 12 + 7 = 19 \text{ सेमी है।}$$

4. माना, दो क्रमागत सम धन सम संख्याएँ x तथा $(x + 2)$ हैं।

दिया है, संख्याओं के वर्गों का योग $= 244$

$$\therefore (x)^2 + (x + 2)^2 = 244$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 244$$

$$2x^2 + 4x + 4 - 244 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 240 = 0$$

$$2(x^2 + 2x - 120) = 0$$

$$x^2 + 12x - 10x - 120 = 0$$

$$x(x + 12) - 10(x + 12) = 0$$

$$(x + 12)(x - 10) = 0$$

यदि $x + 12 = 0$, तब $x = -12$ (अमान्य)

यदि $x - 10 = 0$, तब $x = 10$

तथा $(x + 2) = 10 + 2 \Rightarrow 12$

अतः अभीष्ट क्रमागत धन सम संख्याएँ 10 तथा 12 हैं।

$$5. 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$$

$$2x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(2x-3)(x-1) = 0$$

$x = \frac{3}{2}$ तथा $x = 1$ इसके दो मूल हैं।

6. माना, उस व्यक्ति की वर्तमान आयु x वर्ष है।

तब, 4 वर्ष के बाद व्यक्ति की आयु $= (x+4)$ वर्ष

प्रश्नानुसार—

$$x \times (x+4) = 896$$

$$x^2 + 4x = 896$$

$$x^2 + 4x - 896 = 0$$

$$x^2 + 4x - 896 = 0$$

$$x^2 + 32x - 28x - 896 = 0$$

$$x(x+32) - 28(x+32) = 0$$

$$(x+32)(x-28) = 0$$

यदि $x+32=0$, तब $x = -32$

यदि $x-28=0$, तब $x = 28$

अतः उस व्यक्ति की वर्तमान आयु 28 वर्ष है।

प्रश्नावली 4 c

लघु उत्तरीय प्रश्न

$$1. x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 3$$

$$x^2 + 1 = 3x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

अब श्रीधराचार्य सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ से}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

माना वो मूल α व β है तब

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ व } \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2. \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$$

$$\frac{x-2-x}{x(x-2)} = 3$$

$$\frac{-2}{x(x-2)} = 3$$

$$-2 = 3x(x-2)$$

$$-2 = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

अब श्रीधाराचार्य सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ से

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

तब इसके मूल $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ व $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ होंगे।

$$3. 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर

$$a = 16, b = -8, c = 1$$

श्रीधाराचार्य सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ से

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 16 \times 1}}{2 \times 16}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32}$$

+ लेने पर

$$x = \frac{8}{32} + 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

– लेने पर

$$x = \frac{8}{32} - 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

अतः इसके मूल $\frac{1}{4}$ व $\frac{1}{4}$ हैं।

4. $3x^2 - 8x + 4 = 0$

मानक द्विघात समीकरण $9x^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 3, b = -8, c = 4$$

उक्त मानों को श्रीराधाचार्य सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ में रखने पर

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times 4}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$x = \frac{8 \pm 4}{6}$$

+ लेने पर

$$x = \frac{8+4}{6} = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

या $\alpha = 2$

– लेने पर

$$x = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \frac{2}{3}$$

अतः इसके मूल 2 व $\frac{2}{3}$ हैं।

5. $x^2 - (2a + 3b)x + (a^2 + 3ab + 2b^2)$

मानक समीकरण $ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर

$$a = 1, b = -(2a + 3b), c = (a^2 + 3ab + 2b^2)$$

श्रीधाराचार्य सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ से

$$x = \frac{(2a + 3b) \pm \sqrt{[-(2a + 3b)]^2 - 4 \times 1 \times (a^2 + 3ab + 2b^2)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{2a + 3b \pm \sqrt{4a^2 + 9b^2 + 12ab - 4[a^2 + 3ab + 2b^2]}}{2}$$

$$x = \frac{2a + 3b \pm \sqrt{4a^2 + 9b^2 + 12ab - 4a^2 - 12ab - 8b^2}}{2}$$

$$x = \frac{2a + 3b \pm \sqrt{b^2}}{2}$$

$$x = \frac{2a + 3b \pm b}{2}$$

एक बार धनात्मक चिन्ह लेने पर

$$x = \frac{2a + 3b + b}{2}$$

$$x = \frac{2a + 4b}{2}$$

$$x = a + 2b$$

एक बार ऋणात्मक चिन्ह लेगे।

$$x = \frac{2a + 3b - b}{2}$$

$$x = \frac{2a + 2b}{2}$$

$$x = a + b$$

अतः इसके मूल $a + 2b$ व $a + b$ हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

- माना, मोहन उस काम को x दिनों में कर सकता है।

तब, राधे उस काम को करेगा $= (x + 6)$ दिनों में

$$\therefore \text{मोहन का एक दिन का काम} = \frac{1}{x}$$

$$\text{तथा राधे का एक दिन का काम} = \frac{1}{(x + 6)}$$

$$\text{अब, राधे तथा मोहन का एक साथ मिलकर करने पर एक दिन का काम} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 6}$$

$\therefore$ रोध तथा मोहन उस कार्य को एक साथ मिलकर कुल 4 दिनों में समाप्त कर लेते हैं।

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x+6+x}{x(x+6)}$$

$$x(x+6) = 4 \times (2x+6)$$

$$x^2 + 6x = 8x + 24$$

$$x^2 + 6x - 8x - 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4x - 24 = 0$$

$$x(x-6) + 4(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x+4) = 0$$

यदि $x-6=0$, तब $x=6$

यदि $x+4=0$, तब $x=-4$ (अमान्य)

अतः राधे उस कार्य को कुल 6 दिनों में कर सकता है।

2. माना, आयताकार पार्क की चौड़ाई x मीटर है।

तब, आयताकार पार्क की लम्बाई $= (x+8)$ मीटर

$$\therefore \text{पार्क का क्षेत्रफल} = 240 \text{ मी}^2$$

$$\text{ल०} \times \text{चौ०} = 240 \text{ मी}^2$$

$$\therefore (x+8) \times x = 240$$

$$x^2 + 8x - 240 = 0$$

$$x^2 + 20x - 12x - 240 = 0$$

$$x(x+20) - 12(x+20) = 0$$

$$(x+20)(x-12) = 0$$

यदि $x+20=0$, तब $x=-20$ (अमान्य)

यदि $x-12=0$, तब $x=12$

अतः आयताकार पार्क की चौड़ाई $= 12$ मीटर

तथा आयताकार पार्क की लम्बाई $= 12+8 \Rightarrow 20$ मीटर है।

3. माना एक विषम धनात्मक पूर्णांक $x+1$ है।

तब दूसरा विषम क्रमागत पूर्णांक $x+3$ होगी।

प्रश्नानुसार, वर्गों का योग करेंगे—

$$(x+1)^2 + (x+3)^2 = 290$$

$$x^2 + 1 + 2x + x^2 + 9 + 6x = 290$$

$$2x^2 + 8x + 10 = 290$$

$$2x^2 + 8x + 10 - 290 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 280 = 0$$

$$x^2 + 4x - 140 = 0$$

$$x^2 + 14x - 10x - 140 = 0$$

$$x(x+14) - 10(x+14) = 0$$

$$(x+14)(x-10) = 0$$

$x = 10$ लेने पर

वह संख्या $x+1 = 11$

तथा $x+3 = 10+3 = 13$ है।

4. दिया है, शांत जल में नाव की चाल = 15 किमी/घण्टा
माना, जल धारा की चाल = x किमी/घण्टा है।

$$\therefore \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\therefore \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

प्रश्नानुसार—

$$\frac{30}{(15+x)} + \frac{30}{(15-x)} = 4 + \frac{30}{60}$$

$$30 \left[\frac{1}{(15+x)} + \frac{1}{(15-x)} \right] = 4 \frac{1}{2}$$

$$30 \left[\frac{15-x+15+x}{(15+x)(15-x)} \right] = \frac{9}{2}$$

$$30 \left[\frac{30}{225-x^2} \right] = \frac{9}{2}$$

$$\frac{30 \times 30 \times 2}{9} = 225 - x^2$$

$$200 = 225 - x^2$$

$$x^2 = 225 - 200$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm \sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

$\therefore (x = 5)$ तथा $(x = -5)$ (अमान्य)

अतः जल धारा की चाल 5 किमी/घण्टा है।

5. माना, भिन्न का अंश = x है।

तब, भिन्न का हर = $x+1$

प्रश्नानुसार—

$$3 \times \frac{x}{x+1} = 2 \times \frac{(x+1)}{x} - 1$$

$$\frac{3x}{x+1} - \frac{2(x+1)}{1} = -1$$

$$\frac{3x^2 - 2(x+1)^2}{(x+1) \times x} = -1$$

$$\frac{3x^2 - 2(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x} = -1$$

$$3x^2 - 2x^2 - 4x - 2 = -1(x^2 + x)$$

$$x^2 - 4x - 2 = -x^2 - x$$

$$x^2 - 4x - 2 + x^2 + x = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x + x - 2 = 0$$

$$2x(x-2) + 1(x-2) = 0$$

$$(x-2)(2x+1) = 0$$

यदि $x-2=0$, तब $x=2$

यदि $2x+1=0$, तब $x = \frac{-1}{2}$ (अमान्य)

$$\text{अतः अभीष्ट भिन्न} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

6. माना, समकोण त्रिभुज का आधार $= x$ सेमी तथा लम्ब $= y$ सेमी है
तब, त्रिभुज का कर्ण $= (x+2)$ सेमी $= (2y+1)$ सेमी ... (1)
समीकरण (1) से—

$$2y+1 = x+2$$

$$2y = x+2-1$$

$$y = \frac{x+1}{2} \dots (2)$$

अब पाइथागोरस प्रमेय से—

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$$

$$(x+2)^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \quad \left\{ \because y = \frac{x+1}{2} \right\}$$

$$x^2 + 4x + 4 - x = \frac{x^2 + 2x + 1}{4}$$

$$4(4x+4) = x^2 + 2x + 1$$

$$16x + 16 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 2x - 16x + 1 - 16 = 0$$

$$x^2 - 14x - 15 = 0$$

$$x^2 - 15x + x - 15 = 0$$

$$x(x-15) + 1(x-15) = 0$$

$$(x-15)(x+1) = 0$$

यदि $x-15=0$, तब $x=15$

यदि $x+1=0$, तब $x=-1$ (अमान्य)

∴ त्रिभुज का आधार $= x = 15$ सेमी

$$\text{त्रिभुज का लम्ब} = \frac{x+1}{2} = \frac{15+1}{2} \Rightarrow 8 \text{ सेमी}$$

तथा त्रिभुज का कर्ण $= x+2 = 15+2 \Rightarrow$ सेमी

अतः समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाएँ 8 सेमी, 15 सेमी तथा 17 सेमी हैं।

7. माना, घड़ी का क्रय मूल्य $= x$ है।

तब, लाभ प्रतिशत $= x\%$

दिया है, घड़ी का विक्रय मूल्य $= ₹ 24$

प्रश्नानुसार—

$$x \frac{x \times x}{100} = 24$$

$$x + \frac{x^2}{100} = 24$$

$$\frac{100x + x^2}{100} = 24$$

$$100x + x^2 = 24 \times 100$$

$$x^2 + 100x - 2400 = 0$$

$$x(x+120) - 20(x+120) = 0$$

$$(x+120)(x-20) = 0$$

यदि $x+120=0$, तब $x=-120$ (अमान्य)

यदि $x-20=0$, तब $x=20$

अतः घड़ी का क्रय मूल्य ₹ 20 है।

प्रश्नावली 4(D)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 2, b = -6, c = 3$$

अब विविक्तकर के सूत्र $D = b^2 - 4ac$ में a, b, c के मान रखेंगे।

$$D = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3$$

$$D = 36 - 24$$

$$D = 12$$

हम देखते हैं कि दिए हुए समीकरण का विविक्तकर धनात्मक परंतु पूर्ण वर्ग नहीं है।
अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक, अपरिमेय, असमान हैं।

2. $8z^2 + 2z - 3 = 0$

समीकरण की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

माना $x = z$ हैं, तब

$$a = 8, b = 2, c = -3$$

अब विविक्तकर के सूत्र $D = b^2 - 4ac$ में a, b, c का मान रखकर अभिष्ट विविक्तकर निकालते हैं।

$$D = (2)^2 - 4 \times 8 \times -3$$

$$4 - 32 \times -3$$

$$4 + 96 = 100$$

हम देखते हैं कि दिए हुए समीकरण का विविक्तकर धनात्मक तथा पूर्ण वर्ग है।
अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक, परिमेय, असमान होंगे।

3. वास्तविक, परिमेय, समान

4. $3x^2 - 4x - a = 0$ मानक समी से तुलना करने पर $a = 3, b = -4, c = -a$

दिया है, विविक्तकर 112

$$D = b^2 - 4ac$$

$$12 = (-4)^2 - 4 \times 3 \times -a$$

$$112 = 16 + 12a$$

$$12a = 112 - 16$$

$$12a = 96$$

$$a = \frac{96}{12}$$

$$a = 8$$

अतः $a = 8$ है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है,

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

जहाँ, $a = 3, b = 8$, तथा $c = 5$

$$\therefore \text{विविक्तकर} \quad (D) = b^2 - 4ac \\ = 8^2 - 4 \times 3 \times 5$$

$$= 64 - 60$$

$$= 4 > 0$$

$\therefore D > 0$ परन्तु पूर्ण वर्ग है।

अतः समीकरण के मूल परिमेय हैं।

2. दिया है,

$$3x^2 + (p-2)x + 3 = 0$$

जहाँ, $a = 3, b = p-2$ तथा $c = 3$

यदि समीकरण के मूल परिमाण में समान परन्तु विपरित चिन्ह के हों।

तब, x का गुणांक $= 0$

$$\therefore (p-2) = 0$$

$$\text{अतः } p = 2$$

3. दिया है,

$$2px^2 - 8x + p = 0$$

जहाँ, $a = 2p, b = -8$ तथा $c = p$

यदि समीकरण के मूल समान हों।

तब, विविक्तर $(D) = 0$

$$\therefore b^2 - 4ac = 0$$

$$(-8)^2 - 4 \times 2p \times p = 0$$

$$64 - 8p^2 = 0$$

$$8p^2 = 64$$

$$p^2 = \frac{64}{8}$$

$$p^2 = 8$$

$$p = \pm \sqrt{8}$$

$$\text{अतः } p = \pm 2\sqrt{2}$$

4. हम जानते हैं, कि मूल बराबर तभी होंगे जब $D = 0$ होता है।

$$ax^2 - 8x + a = 0$$

की तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर—

$$a = a, b = -8, c = a$$

$$D = 0 \text{ से}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-8)^2 - 4 \times a \times a = 0$$

$$64 - 4a^2 = 0$$

$$4a^2 = 64$$

$$a^2 = \frac{64}{4}$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

$$5. x^2 + 5kx + 16 = 0$$

समीकरण की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 1, b = 5k, c = 16$$

$D = b^2 - 4ac$ से (अवास्तविक मूल के लिए)

$$(5k)^2 - 4 \times 1 \times 16 < 0$$

$$25k^2 - 64 < 0$$

$$25k^2 < 64$$

$$k^2 < \frac{64}{25}$$

$$k < \pm \frac{8}{5}$$

$$-\frac{8}{5} < k < \frac{8}{5}$$

$$6. \text{ दिया है, } (m^2 - 3)x^2 + 3mx + 3m + 1 = 0$$

माना, समी० के मूल α तथा β हैं।

यदि समीकरण के मूल एक-दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \text{ समीकरण के मूलों का योगफल } = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\therefore \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{3m + 1}{(m^2 - 3)}$$

$$1 = \frac{3m + 1}{m^2 - 3}$$

$$m^2 - 3 = 3m + 1$$

$$m^2 - 3m - 3 - 1 = 0$$

$$m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$m^2 - 4m + m - 4 = 0$$

$$m(m - 4) + 1(m - 4) = 0$$

$$(m - 4)(m + 1) = 0$$

यदि $(m - 4) = 0$, तब $m = 4$

यदि $(m + 1) = 0$, तब $m = -1$

अतः $(m = 4)$ तथा $(m = -1)$ के लिए समीकरण $(m^2 - 3)x^2 + 3mx + 3m + 1 = 0$ के मूल एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

7. दिया है,

$$a(x^2 + 1) + bx = 0$$

$$ax^2 + a + bx = 0$$

$$ax^2 + bx + a = 0$$

$$\text{समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{a}{a} = 1$$

$\therefore$ समीकरण के मूलों का गुणनफल 1 है।

अतः समीकरण के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

8. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर हमें मिलता है।

$$a = 9, b = -12, c = 4$$

$$D = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4$$

$$D = 144 - 144$$

अतः विविक्कर 0 है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, $3x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0$

जहाँ, $a = 3, b = 2\sqrt{5}$ तथा $c = -5$

$\therefore$ विविक्कर $(D) = b^2 - 4ac$

$$= (2\sqrt{5})^2 - 4 \times 3 \times (-5)$$

$$= 20 + 60$$

$$= 80 > 0$$

$\therefore D > 0$, परन्तु पूर्ण वर्ग नहीं है।

$\therefore$ समीकरण के मूल वास्तविक, अपरिमेय तथा असमान हैं।

अब, $x = \frac{-b \pm \sqrt{D/29}}{2a}$

$$= \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-2\sqrt{5} \pm 4\sqrt{5}}{6}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{6} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

तथा $x_2 = \frac{-2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}}{6} = \frac{-6\sqrt{5}}{6} = -\sqrt{5}$

अतः $\left(x = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ तथा $(x = -\sqrt{5})$ समीकरण के मूल हैं।

2. दिया है,

$$(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0$$

जहाँ, $a = m+1$, $b = 2(m+3)$ तथा $c = 2m+3$

यदि समीकरण के मूल समान हैं, तो

$$\text{विविक्तर } (D) = 0$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 = 4ac$$

$$[2(m+3)]^2 = 4 \times (m+1) \times (2m+3)$$

$$4 \times (m+3)^2 = 4 \times (2m^2 + 3m + 2m + 3)$$

$$m^2 + 6m + 9 = 2m^2 + 5m + 3$$

$$2m^2 - m^2 + 5m - 6m + 3 - 9 = 0$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$m^2 - 3m + 2m - 6 = 0$$

$$m(m-3) + 2(m-3) = 0$$

$$(m-3)(m+2) = 0$$

यदि $m-3 = 0$, तब $m = 3$

यदि $m+2 = 0$, तब $m = -2$

अतः ($m = 3$) तथा ($m = -2$) के लिए समीकरण

$$(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0 \text{ के मूल समान हैं।}$$

3. यहाँ $(1+m^2)x^2 + 2mc + (c^2 - a^2) = 0$ समी० की तुलना

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$A = 1 + m^2$$

$$B = 2mc$$

$$C = c^2 - a^2$$

इसके मूल समान हैं, यदि

$$D = 0$$

$$\Rightarrow B^2 - 4AC = 0$$

$$\Rightarrow (2mc)^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2c^2 - 4(c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2) = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + m^2a^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2(1+m^2)$$

इति सिद्धम्

गणित-10

प्रश्नावली 4 (E)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. (i) $6x^2 - x - 1 = 0$

$$\text{समीकरण के मूलों का योग} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{(-1)}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}$$

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-1}{6}$$

(ii) $3x^2 - 7x + 11 = 0$

$$\text{समीकरण के मूलों का योगफल} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{(-7)}{3} \Rightarrow \frac{7}{3}$$

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{11}{3}$$

(iii) $px^2 - qx - r = 0$

$$\text{समीकरण के मूलों का योगफल} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{(-q)}{p} = \frac{q}{p}$$

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-r}{p}$$

(iv) $3x^2 - 4x = 0$

$$\text{समीकरण के मूलों का योगफल} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{(-4)}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}$$

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{0}{3} \Rightarrow 0$$

2. दिया है, समीकरण $5x^2 - 4x - 3 = 0$ के मूल α, β हैं।

$$\text{तब, समीकरण के मूलों का योगफल} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{(-4)}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}$$

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-3}{5}$$

$$\text{अतः} \quad \alpha + \beta = \frac{4}{5} \text{ तथा } \alpha \cdot \beta = \frac{-3}{5}$$

3. (i) $(2+\sqrt{3})$ तथा $(2-\sqrt{3})$

माना, समीकरण के मूल α व β हैं।

$$\therefore \text{मूलों का योगफल} \quad (\alpha + \beta) = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) \\ = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 4$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} \quad (\alpha \cdot \beta) = (2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3}) \\ = 2^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 4 - 3 \Rightarrow 1$$

अतः अभीष्ट द्विघात समीकरण

$$= x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(ii) \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ तथा } \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{मूलों का योगफल} \quad (\alpha + \beta) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} \Rightarrow 1$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} \quad (\alpha \cdot \beta) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{1^2 - (\sqrt{3})^2}{4} \\ = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण} = x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1x + \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 2x - 1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

(iii) 3 और -4

$$\therefore \text{मूलों का योगफल} \quad (\alpha + \beta) = 3 + (-4) \\ = 3 - 4 = -1$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} = (\alpha \cdot \beta) = 3 \times (-4) = -12$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण} = x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (-1)x + (-12) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$(iv) \frac{1}{2} \text{ व } \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{ मूलों का योगफल } (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल } (\alpha \cdot \beta) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण } = x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - 8x + 3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 8x + 3 = 0$$

4. दिया है, समीकरण के मूलों का योगफल = 6

$$\text{तथा समीकरण के मूलों का गुणनफल} = -16$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण } = x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + (-16) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

5. दिया है,

$$\text{मूलों का योगफल} = 5$$

$$\text{तथा मूलों का गुणनफल} = 6$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण } = x^2 - (\text{मूलों का योग}) x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

6. $x^2 + 2x - p = 0$

माना इसके मूल α व β हैं।

माना $\alpha = 2$ (दिया है, एक मूल 2 है)

$$\text{मूलों का योग } (\alpha + \beta) = - \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha + \beta = -2$$

$$\text{मूलों का गुणनफल } \alpha\beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$2 \times -4 = \frac{-p}{1}$$

$$\Rightarrow p = +8$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, एक मूल $\alpha = 1 + \sqrt{2}$

तथा मूलों का योग $\alpha + \beta = 2$

$$\beta = 2 - \alpha$$

$$\beta = 2 - 1 - \sqrt{2}$$

$$\beta = 1 - \sqrt{2}$$

$$\alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$\alpha\beta = 1 - 2 = -1$$

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ में उक्त मान रखने पर—

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

2. दिया है, $15x^2 - 7x + 3 = 0$ जहाँ, $a = 15$, $b = -7$ तथा $c = 3$

माना, समीकरण के मूल α एवं β हैं।

$$\begin{aligned} \therefore \text{ समीकरण के मूलों का गुणनफल } (\alpha \cdot \beta) &= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} \\ &= \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{अतः समीकरण के मूलों के व्युत्क्रमों का गुणनफल} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha \cdot \beta} = \frac{1}{(1/5)} \Rightarrow 5$$

3. माना वह संख्या x है, तब उसका व्युत्क्रम $= \frac{1}{x}$

$$\text{दोनों का योग} \quad x + \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - x - x + 1 = 0$$

$$x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ या } x = 1$$

अतः वह संख्या 1 है।

4. $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$$

$$x(x - 4) - 3(x - 4) = 0$$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x = 3, x = 4$$

इसके मूल $\alpha = 3$ व $\beta = 4$ हैं।

$$\begin{aligned}\text{प्रश्नानुसार, मूलों का व्युत्क्रमों का योगफल} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

5. दिया है, समीकरण $\sqrt{3}x^2 + 10x - 8\sqrt{3} = 0$ का एक मूल $-4\sqrt{3}$ है।

$$\therefore \text{ समीकरण के मूलों का गुणनफल} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -8$$

$$\text{अतः दूसरा मूल} = \frac{\text{गुणनफल}}{\text{एक मूल}} = \frac{-8}{-4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6. दिया है, समीकरण $x^2 - 3x - p = 0$ का एक मूल 2 है।

$$\therefore \text{ समीकरण के मूलों का योगफल} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$\text{अतः दूसरा मूल} = \text{योग} - \text{एक मूल} = 3 - 2 = 1$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (b) 4. (b) 5. (d) 6. (c) 7. (a) 8. (c)
9. (b) 10. (c)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (b) 2. (b) 3. (a) 4. (c)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से—

आयताकार बगीचे की लम्बाई $= (x + 5)$ मीटर

आयतकार बगीचे की चौड़ाई $= x$ मीटर

आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल $= 300$ वर्ग मीटर

अर्थात् लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 300$

$$(x + 5) \times (x) = 300$$

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$

अतः समस्या को हल करने के लिए समीकरण $x^2 + 5x - 300 = 0$ होगी।

2. समीकरण $x^2 + 5x - 300 = 0$ को हल करने पर,

$$x^2 + 5x - 300 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 20x - 15x - 300 = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 20) - 15(x + 20) = 0$$

$$\Rightarrow (x+20)(x-15)=0$$

$$\Rightarrow x=15$$

$$[\because x \neq -20]$$

अतः बगीचे की चौड़ाई $x = 15$ मीटर है।

3. चित्र से—

$$\text{बगीचे की लम्बाई} = (x+5) \text{ मीटर} = 15+5 = 20 \text{ मीटर}$$

अतः बगीचे की लम्बाई 20 मीटर है।

4. आयताकार बगीचे का परिमाण = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

यहाँ, लम्बाई = 15 मीटर तथा चौड़ाई = 5 मीटर

$$\text{तब परिमाण} = 2(15+5) = 2(20) = 40 \text{ मीटर}$$

अतः बगीचे का परिमाण 40 मीटर है।

कूट आधारित प्रश्न

1. (i) 2. (iii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (a) 2. (a) 3. (b) 4. (c)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

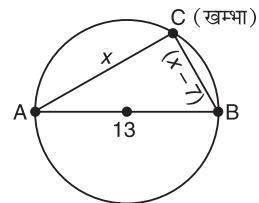
(iii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न :

1. असत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न (HOTS)

1. माना फाटक A से खंभे के दूरी = x मीटर
तथा फाटक B से खंभे की दूरी = $(x-7)$ मीटर
वृताकार पार्क का व्यास = 13 मीटर
प्रश्नानुसार,



$$\text{पाइथागोरस प्रमेय से, } AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad [\because \angle C = 90^\circ]$$

$$\Rightarrow x^2 + (x-7)^2 = (13)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 49 - 14x = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 7x - 60) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-12) + 5(x-12) = 0 \Rightarrow (x-12)(x+5) = 0$$

$$x = 12 \text{ तथा } x = -5, \text{ यह अमान्य होगा}$$

अतः फाटक A से खंभे की दूरी = 12 मीटर

तथा फाटक B से खंभे की दूरी = $12 - 7 = 5$ मीटर

2. हम जानते हैं, कि दोपहर 2 बजे से 3 बजे के बीच का समय = 1 घंटे = 60 मिनट
यह देखते हुए कि, दोपहर 2 बजे के बाद t मिनट पर, घड़ी की मिनट की सुई द्वारा 3 बजे दिखाने के लिए आवश्यक समय $\frac{t^2}{4}$ मिनट से 3 मिनट कम पाया गया।

$$\text{अर्थात्, } t + \left(\frac{t^2}{4} - 3 \right) = 60$$

$$\Rightarrow 4t + t^2 - 12 = 240$$

$$\Rightarrow t^2 + 4t - 252 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 18t - 14t - 252 = 0 \quad (\because \text{मध्य पद विभाजन})$$

$$\Rightarrow t(t+18) - 14(t+18) = 0$$

$$\Rightarrow (t+18)(t-14) = 0$$

चूँकि समय ऋणात्मक नहीं हो सकता इसलिए $(t+18)$ अमान्य होगा। तब,

$$t - 14 = 0 \Rightarrow t = 14$$

$$\therefore t = 14 \text{ मिनट}$$

अतः आवश्यक मान 14 मिनट है।

3. माना कपड़े के टुकड़े की लम्बाई = x मीटर

तब x मीटर कपड़े का मूल्य = ₹ 2000

$$1 \text{ मीटर कपड़े का मूल्य} = ₹ \frac{2000}{x}$$

कपड़े की नयी लम्बाई = $(x+50)$ मीटर

$$\text{अब प्रति मीटर कपड़े का मूल्य} = ₹ \frac{2000}{x+50}$$

अब दिया है—

$$\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x+50} = 2$$

$$\Rightarrow 2000 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+50} \right] = 2 \Rightarrow 200 \left[\frac{x+50-x}{x(x+50)} \right] = 2$$

$$\Rightarrow 2000 \times 50 = 2x(x+50) \Rightarrow 50000 = x^2 + 50x$$

$$\Rightarrow x^2 + 50x - 50000 = 0 \Rightarrow x^2 + 250x - 200x - 50000 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+250) - 200(x+250) = 0$$

$$\Rightarrow (x+250)(x-200) = 0 \Rightarrow x = -250 \text{ या } x = 200$$

$\therefore$ लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती इसलिए $x = -250$ अमान्य होगा।

$\therefore$ कपड़े की लम्बाई = 200 मीटर

$$\text{तथा मूल्य प्रति मीटर} = \frac{2000}{200} = ₹ 10$$

अतः कपड़े की लम्बाई 200 मीटर तथा प्रति मीटर कपड़े का मूल्य ₹ 10 होगा।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) दिया है—

मोटर बोट की गति = 20 किमी/घण्टा

धारा की गति = x किमी/घण्टा

तब धारा के प्रतिकूल मोटर बोट की गति $(20-x)$ किमी/घण्टा होगी।

2. (a) गति, दूरी व समय के बीच संबंध होगा—

$$\text{गति} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

3. (c) धारा के अनुकूल मोटर बोट की गति = $(20+x)$ किमी/घण्टा

तथा धारा के विपरीत मोटर बोट की गति = $(20-x)$ किमी/घण्टा

अनुकूल व प्रतिकूल चली गयी दूरी = 15 किमी

प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} \frac{15}{20-x} - \frac{15}{20+x} &= 1 \\ \Rightarrow 15 \left[\frac{20+x-20+x}{400-x^2} \right] &= 1 \\ \Rightarrow 30x &= 400-x^2 \Rightarrow x^2 + 30x - 400 = 0 \end{aligned}$$

अतः धारा की गति के लिए द्विघात समीकरण $x^2 + 30x - 400$ होगी।

4. (b) समीकरण $x^2 + 30x - 400 = 0$ को हल करने पर,

$$\begin{aligned} x^2 + 30x - 400 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + 40x - 10x - 400 &= 0 \\ \Rightarrow x(x+40) - 10(x+40) &= 0 \\ \Rightarrow (x+40)(x-10) &= 0 \end{aligned}$$

$x = -40$ अमान्य होगा, क्योंकि गति ऋणात्मक नहीं होती।

$\therefore x = 10$ किमी/घण्टा

अतः धारा की गति 10 किमी/घण्टा होगी।

5. (c) नाव की धारा के अनुकूल गति = $20+x$ किमी/घण्टा

$$= 20+10 = 30 \text{ किमी/घण्टा}$$

धारा के अनुकूल चलने में लगा समय = $\frac{\text{धारा के अनुकूल तय दूरी}}{\text{लिया गया समय}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ घंटा} \\ &= \frac{1}{2} \times 60 \text{ मिनट} = 30 \text{ मिनट} \end{aligned}$$

अतः नाव का धारा के अनुकूल चलने में 30 मिनट का समय लगता है।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (d) राज की कार की गति = x किमी/घण्टा

अजय की कार की गति = $(x + 5)$ किमी/घण्टा

कुल चली गयी दूरी = 400 किमी

अब जय की कार द्वारा 2 घंटे में चली गयी दूरी = चाल $\times$ समय

$$= (x + 5) \times 2 = 2(x + 5) \text{ किमी}$$

अतः अजय द्वारा 2 घंटे में $2(x + 5)$ किमी की दूरी चली गयी है।

2. (c) राज को समान दूरी 400 किमी तय करने में अजय से 4 घंटे अधिक लगते हैं, तब

$$\frac{400}{x} - \frac{400}{x + 5} = 4 \quad \left[\because \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} \right]$$

$$\Rightarrow 400 \left[\frac{x + 5 - x}{x^2 + 5x} \right] = 4$$

$$\Rightarrow 400 \times 5 = 4(x^2 + 5x)$$

$$\Rightarrow 500 = x^2 + 5x \quad \Rightarrow x^2 + 5x - 500 = 0$$

अतः राज की कार की गति को प्रदर्शित करने वाली द्विघात समीकरण $x^2 + 5x - 500 = 0$ होगी।

3. (a) समीकरण $x^2 + 5x - 500 = 0$ को हल करने पर,

$$x^2 + 5x - 500 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 25x - 20x - 500 = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 25) - 20(x + 25) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 25)(x - 20) = 0$$

यहाँ $x = -25$, अमान्य होगी, क्योंकि गति ऋणात्मक नहीं होती।

$$\therefore x - 20 = 0 \Rightarrow x = 20 \text{ किमी/घंटा}$$

अतः राज की कार की गति 20 किमी/घंटा होगी।

4. अजय की चाल = $x + 5$ किमी/घंटा = $20 + 5 = 25$ किमी/घंटा

चली गयी दूरी = 400 किमी

$$400 \text{ किमी चलने में लगा समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{400}{25} = 16 \text{ घंटे}$$

अतः 400 किमी की यात्रा करने में अजय को 16 घंटे का समय लगेगा।

5. (b) राज की गति = 20 किमी/घंटा

चली गयी दूरी = 400 किमी

$$\therefore \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\text{अतः राज को 400 किमी की दूरी तय करने में लगा समय} = \frac{400}{20} = 20 \text{ घंटे}$$

प्रश्नावली 5 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. (i) श्रेढ़ी 1, 1, 2, 2, 3, 3,...

यहाँ $d_1 = 1 - 1 = 0$
 $d_2 = 2 - 1 = 1$
 $d_3 = 2 - 2 = 0$
 $d_4 = 3 - 2 = 1$
 $d_5 = 3 - 3 = 0$

यहाँ सार्वअन्तर d का मान समान नहीं है। अतः दी गई श्रेढ़ी समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

- (ii) श्रेढ़ी $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots$

यहाँ $d_1 = \sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$
 $d_2 = \sqrt{27} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 $d_3 = \sqrt{48} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\therefore$ सार्वअन्तर $d_1 = d_2 = d_3 = \sqrt{3}$ अतः दी गई श्रेढ़ी समान्तर श्रेढ़ी में है।

- (iii) 0.3, 0.33, 0.333,...

यहाँ $d_1 = 0.33 - 0.3 = 0.03$
 $d_2 = 0.333 - 0.33 = 0.003$

यहाँ सार्वअन्तर d का मान समान नहीं है। अतः दी गई श्रेढ़ी समान्तर श्रेढ़ी में नहीं है।

- (iv) श्रेढ़ी $4, 4 + \sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}, 4 + 3\sqrt{2}, \dots$

यहाँ $d_1 = 4 + \sqrt{2} - 4 = \sqrt{2}$
 $d_2 = 4 + 2\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
 $d_3 = 4 + 3\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ सार्वअन्तर $d_1 = d_2 = d_3 = \sqrt{2}$, अतः दी गई श्रेढ़ी समान्तर श्रेढ़ी में है।

2. श्रेढ़ी 13, 10, 7, 4,...

यहाँ $d_1 = 10 - 13 = -3$
 $d_2 = 7 - 10 = -3$
 $d_3 = 4 - 7 = -3$

$\therefore$ सार्वअन्तर $d_1 = d_2 = d_3 = -3$, अतः दी गई श्रेढ़ी समान्तर श्रेढ़ी में है।

3. दिया है, प्रथम पद = 5, सार्वअन्तर = -3

अब $a = 5$ तथा $d = -3$

$$a_2 = a + d = 5 - 3 = 2$$

$$a_3 = a_2 + d = 2 - 3 = -1$$

$$a_4 = a_3 + d = -1 - 3 = -4$$

अतः वह श्रेणी है, 5, 2, -1, -4...

4. (i)

$$a_n = \frac{n^2}{n+2}$$

$$a_1 = \frac{(1)^2}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{(2)^2}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_3 = \frac{(3)^2}{3+2} = \frac{9}{5}$$

$$a_4 = \frac{(4)^2}{4+2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

अतः चार पद हैं— $\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, \frac{8}{9}$

(ii)

$$a_n = 2^n$$

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 16$$

अतः चार पद हैं— 2, 4, 8, 16

(iii)

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$$

अतः प्रथम चार पद हैं— $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

(iv)

$$a_n = \frac{2n-5}{2}$$

$$a_1 = \frac{2-5}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$a_2 = \frac{2 \times 2 - 5}{2} = \frac{4-5}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = \frac{2 \times 3 - 5}{2} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{2 \times 4 - 5}{2} = \frac{8-5}{2} = \frac{3}{2}$$

अतः प्रथम चार पद हैं— $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

5. समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों तब—

$$d_1 = d_2$$

$$2k^2 + 3k + 6 - (k^2 + 4k + 8) = 3k^2 + 4k + 4 - (2k^2 + 3k + 6)$$

$$2k^2 + 3k + 6 - k^2 - 4k - 8 = 3k^2 + 4k + 4 - 2k^2 - 3k - 6$$

$$k^2 - k - 2 = k^2 + k - 2$$

$$k^2 - k - 2 - k^2 - k + 2 = 0$$

$$-2k = 0$$

$$k = 0$$

अतः k का मान 0 है।

6. दिया है, $a = -5$ और $d = -3$

तब प्रथम पद $a_1 = -5$

$$a_2 = a_1 + d = -5 - 3 = -8$$

$$a_3 = a_2 + d = -8 - 3 = -11$$

अतः समान्तर श्रेणी के प्रथम तीन पद $= -3, -8, -11$ हैं।

7. समान्तर श्रेणी $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$

$$\text{सार्वअन्तर } d = \frac{1}{4} - 0 = \frac{+1}{4}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_6 = a_5 + d = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_7 = a_6 + d = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

अतः इस श्रेणी के अगले तीन पद $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ हैं।

8. $a_n = 2n^2 + 1$

$$a_1 = 2(1)^2 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2(2)^2 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$a_3 = 2(3)^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$a_4 = 2(4)^2 + 1 = 2 \times 16 + 1 = 32 + 1 = 33$$

श्रेणी $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

$$d_1 = a_2 - a_1 \Rightarrow d_2 = a_3 - a_2 \Rightarrow d_3 = a_4 - a_3$$

$$d_1 = 9 - 3 = 6, d_3 = 33 - 19$$

$$d_2 = 19 - 9 = 10 = 14$$

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3$$

अतः यह अनुक्रम समान्तर में नहीं है।

9.
$$a_n = \frac{3+n}{4}$$

$$a_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_2 = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_3 = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n = \frac{3+n}{4}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n$$

$$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \dots \frac{3+n}{4}$$

$$d_1 = a_2 - a_1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = a_3 - a_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4}$$

$$d_3 = a_4 - a_3 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{7-6}{4} = \frac{1}{4}$$

अतः $d_1 = d_2 = d_3$, सार्वान्तर $= \frac{1}{4}$

अतः यह अनुक्रम समान्तर श्रेणी में है तथा सार्वान्तर $\frac{1}{4}$ है।

10. समान्तर श्रेणी $(a+b), (a+1)+b, (a+1)+(b+1) \dots$

$$\text{सार्वान्तर } d_1 = (a+1)+b - a - b$$

$$d_1 = a+1+b - a - b = 1$$

$$d_2 = (a+1) + (b+1) - (a+1) - b$$

$$d_2 = a+1+b+1-a-1-b=1$$

अतः सर्वान्तर $d=1$

$$\text{अतः } a_4 = a_3 + d = (a+1) + (b+1) + 1$$

$$a_4 = a+1+b+1+1 = (a+2) + (b+1) \text{ या } (a+1) + (b+2)$$

$$a_5 = a_4 + d = (a+2) + (b+1) + 1$$

$$= (a+2) + (b+2)$$

$$a_6 = a_5 + d = (a+3) + (b+2)$$

11. (i) 3, 6, 12, 24,....

$$\therefore a_2 - a_1 = 6 - 3 \Rightarrow 3,$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 6 \Rightarrow 6$$

$$\text{तथा } a_4 - a_3 = 24 - 12 \Rightarrow 12$$

$$\therefore a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$$

अतः दी हुई संख्याओं की श्रेणी, समान्तर श्रेणी में नहीं हैं।

(ii) 4, 4, 4, 4,....

$$\therefore a_2 - a_1 = 4 - 4 \Rightarrow 0,$$

$$a_3 - a_2 = 4 - 4 \Rightarrow 0$$

$$\text{तथा } a_4 - a_3 = 4 - 4 \Rightarrow 0$$

$$\therefore a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = d$$

अतः दी हुई संख्याओं की श्रेणी, समान्तर श्रेणी में हैं। तथा सार्वान्तर $(d)=0$

(iii) $1^3, 3^3, 5^3, 7^3, \dots$

$$\therefore a_2 - a_1 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 \Rightarrow 26,$$

$$a_3 - a_2 = 5^3 - 3^3 = 125 - 27 \Rightarrow 98$$

$$\text{तथा } a^4 - a^3 = 7^3 - 5^3 \Rightarrow 343 - 125 \Rightarrow 218$$

$$\therefore a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$$

अतः दी हुई संख्याओं की श्रेणी, समान्तर श्रेणी में नहीं है।

प्रश्नावली 5B

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. किसी समान्तर श्रेणी का n वाँ पद ज्ञात करने का सूत्र है—

$$a_n = a + (n-1)d$$

2. श्रेणी 3, 5, 7, 9 का 10वाँ पद निकालना है।

$$a = 3, d = 5 - 3 = 2$$

$$a_n = a + (n-1)d \text{ से}$$

$$a_{10} = 3 + (10-1) \times 2$$

$$a_{10} = 3 + 9 \times 2$$

$$a_{10} = 3 + 18$$

$$a_{10} = 21$$

3. समान्तर श्रेढ़ी— $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18} \dots$

यहाँ $a = \sqrt{2}$

तथा $d = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

अतः समान्तर श्रेढ़ी का 10 वाँ पद $(a_{10}) = \sqrt{2} + (10-1) \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2}$
 $= 10\sqrt{2}$

4. समान्तर श्रेढ़ी 4, 9, 14, ... 254

$$l = 254, a = 4, d = 9 - 4 = 5$$

तब अन्त से n वाँ पद का सूत्र $l = (n-1)d$

$$254 - (n-1) \times 5 = 254 - 7 \times 5$$

$$254 - 35 = 219$$

5. $d = -4, n = 7$ तथा $a_n = 4$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$4 = a + (7-1) \times -4$$

$$4 = a + 6 \times -4$$

$$4 = a - 24$$

$$a = 4 + 24$$

$$a = 28$$

6. दिया है, $2k, 3k-1, 8$ एक समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

तब $d = (3k-1) - 2k = 8 - (3k-1)$

$$3k-1-2k = 8-3k+1$$

$$k-1 = 9-3k$$

$$k+3k = 9+1$$

$$4k = 10$$

$$k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ या } 2.5$$

अतः $k = \frac{5}{2}$

7. दिया है, $d = 3$

$$\therefore a_n = a + (n-1) \times d$$

$$\therefore a_{20} - a_{15} = [a + (20-1) \times 3] - [a + (15-1) \times 3]$$

$$= a + 19 \times 3 - a - 14 \times 3$$

$$= (19-14) \times 3$$

$$= 5 \times 3 \Rightarrow 15$$

$$\begin{aligned}
 8. \text{ दिया है, } & a_{24} - a_{17} = -28 \\
 \therefore [a + (24-1) \times d] - [a + (17-1) \times d] &= -28 \\
 a + 23d - a - 16d &= -28 \\
 7d &= -28 \\
 d &= \frac{-28}{7} \Rightarrow -4
 \end{aligned}$$

अतः समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर ($d = -4$) है।

$$\begin{aligned}
 9. \text{ दिया है, } 18, a, b, -3 \text{ समान्तर श्रेणी में हैं।} \\
 \text{तब, } & d = a - 18 = b - a = -3 - b \\
 \therefore & a - 18 = -3 - b \\
 & a + b = -3 + 18 \\
 \text{अतः } & a + b = 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \text{ माना, दो अंकों की कुल } n \text{ संख्याएँ } 13 \text{ से भाज्य हैं।} \\
 \therefore & a_n = a + (n-1)d \\
 \therefore & 13 + (n-1) \times 13 = 91 \\
 & 13 + 13n - 13 = 91 \\
 & 13n = 91 \\
 & n = \frac{91}{13} = 7 \\
 \therefore & n = 7
 \end{aligned}$$

अतः दो अंकों वाली कुल 7 संख्याएँ, 13 से भाज्य हैं।

$$\begin{aligned}
 11. a_n &= (2n+3) \text{ से} \\
 a_1 &= 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5 \\
 a_2 &= 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \\
 a_3 &= 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9 \\
 d &= a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2 \\
 a_{25} &= a + (25-1)d \\
 &= 5 + 24 \times 2 \\
 &= 5 + 48 = 53
 \end{aligned}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

$$\begin{aligned}
 1. \text{ A.P. : } 31, 28, 25, \dots \quad a &= 31, d = 28 - 31, d = -3 \\
 a_n &= a + (n-1)d \text{ से} \\
 0 &= 31 + (n-1) \times -3 \\
 0 &= 31 - 3n + 3 \\
 0 &= 34 - 3n \\
 3n &= 34
 \end{aligned}$$

$$n = \frac{34}{3} = 11.3$$

अतः श्रेढ़ी का कोई पद शून्य नहीं है। क्योंकि 11.3 पूर्णतया पद नहीं है।

2. श्रेढ़ी 13, 10, 7, 4...

$$a = 13, d = 10 - 13 = -3, a_n = -59$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-59 = 13 + (n-1) \times -3$$

$$-59 = 13 - 3n + 3$$

$$-59 = 16 - 3n$$

$$3n = 16 + 59$$

$$3n = 75$$

$$n = \frac{75}{3}$$

$$n = 25$$

अतः वह पद 25 है।

3. दिया है, $(2n-1)$, $(3n+2)$ तथा $(6n-1)$ समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

$$\text{तब, } d = (3n+1) - (2n-1) = (6n-1) - (3n+2)$$

$$\therefore 3n+2-2n+1 = 6n-1-3n-2$$

$$n+3 = 3n-3$$

$$3+3 = 3n-n$$

$$6 = 2n$$

$$n = \frac{6}{2} \Rightarrow 3$$

$$\text{अतः } n = 3$$

$$\therefore 2n-1 = 2 \times 3 - 1 \Rightarrow 5$$

$$3n+2 = 3 \times 3 + 2 \Rightarrow 11$$

$$\text{तथा } 6n-1 = 6 \times 3 - 1 \Rightarrow 17$$

अतः $(n=3)$ तथा संख्याएँ 5, 11 व 17 हैं।

4. दिया है, A.P. के सातवें पद का 7 गुना = A.P. के 11 वें पद का 11 गुना

$$\therefore 7 \times a_7 = 11 \times a_{11}$$

$$7 \times [a + (7-1) \times d] = 11 \times [a + (11-1) \times d]$$

$$7 \times [a + 6d] = 11 \times [a + 10d]$$

$$7a + 42d = 11a + 110d$$

$$42d - 110d = 11a - 7a$$

$$-68d = 4a$$

$$a = \frac{-68d}{4}$$

$$a = -17d$$

$$\begin{aligned} \text{अब, A.P. का 18 वाँ पद} &= a + (18-1) \times d \\ &= a + 17d \\ &= -17d + 17d \quad \{\because a = -17d\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः A.P. का 18 वाँ पद शून्य होगा।

5. 10 और 250 के बीच 4 के गुणज निकालने हैं। 10 के बाद 4 का पहला गुणज = 12 माना 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की संख्या n है।

$$a = 12, a_n = 248 \text{ तथा } d = 4$$

तब $a_n = a + (n-1)d$ से

$$248 = 12 + (n-1) \times 4$$

$$248 = 12 + 4n - 4$$

$$248 = 8 + 4n$$

$$240 = 4n$$

$$n = \frac{240}{4}$$

$$n = 60$$

अतः 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की संख्या 60 है।

6. माना, तीन अंकों वाली n संख्याएँ 7 से विभाज्य है।

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$a = 105, a_n = 994, d = 7$$

$$994 = 105 + (n-1) \times 7$$

$$994 = 105 + 7n - 7$$

$$994 = 98 + 7n$$

$$994 - 98 = 7n$$

$$896 = 7n$$

$$n = \frac{896}{7}$$

$$n = 128$$

7. माना, समांतर श्रेणी 11, 8, 5, 2. का n वाँ पद -150 है।

$$\text{यहाँ, } a = 11, d = 8 - 11 = -3 \text{ तथा } a_n = -150$$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore 11 + (n-1) \times (-3) = -150$$

$$(n-1) \times (-3) = -150 - 11$$

$$(n-1) \times (-3) = -161$$

$$n-1 = \frac{-161}{-3} \Rightarrow \frac{161}{3}$$

$\therefore 161, 3$ से पूर्ण रूप से विभाज्य नहीं है।

अतः -150 , अभीष्ट सामान्तर श्रेढ़ी का कोई पद नहीं है।

8. दिया है, सामान्तर श्रेढ़ी $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \dots$

माना, अभीष्ट सामान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद पहला ऋणात्मक पद होगा।

$$d = 19\frac{1}{4} - 20 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-4}{4} \Rightarrow \frac{-3}{4}$$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore 20 + (n-1) \times \left(\frac{-3}{4}\right) < 0$$

$$(n-1) \times \left(\frac{-3}{4}\right) < -20$$

$$(n-1) \times \frac{3}{4} > 20$$

$$3n - 3 > 80$$

$$3n > 80 + 3$$

$$n > \frac{83}{3}$$

$$n > 27.66$$

$$\therefore n = 28$$

$$\text{अब, } 928 = 20(28-1) \times \left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$= 20 + \frac{27 \times (-3)}{4}$$

$$= \frac{80-81}{4} \Rightarrow \frac{-1}{4}$$

अतः अभीष्ट श्रेढ़ी का 28 वाँ पद पहला ऋणात्मक पद है, जिसका मान $\frac{-1}{4}$ है।

10. दिया है, a, b और c समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

तब, सार्वअन्तर $(d) = b - a = c - b$

$$b + b = c + a$$

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

सिद्ध करना है, $b^2 - \frac{a^2 + c^2}{4} = \frac{ac}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{L.H.S.} &= b^2 - \frac{a^2 + c^2}{4} \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + c^2}{4} \quad \left\{ \because b = \frac{a+c}{2} \right\} \\ &= \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4} - \frac{a^2 + c^2}{4} \\ &= \frac{a^2 + c^2 + 2ac - a^2 - c^2}{4} \\ &= \frac{2ac}{4} = \frac{ac}{2} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. $a + (3-1)d + a + (8-1)d = 7$

$$a + 2d + a + 7d = 7$$

$$2a + 9d = 7 \quad \dots(i)$$

$$a + 6d + a + 13d = -3$$

$$2a + 19d = -3 \quad \dots(ii)$$

दोनों को घटायेगे—

$$2a + 9d = 7$$

$$2a + 19d = -3$$

$$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$-10d = 10$$

$$d = -1$$

d का मान समी (i) में रखने पर—

$$2a - 9 = 7$$

$$2a = 7 + 9$$

$$2a = 16$$

$$a = \frac{16}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 8$$

अब 10वाँ पद निकालेंगे—

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$= 8 + (10-1) \times -1$$

$$= 8 + 9 \times -1 = 8 - 9$$

$$a_{10} = -1$$

अतः 10वाँ पद -1 है।

$$2. a = 11, a_n = 299, d = 4$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$299 = 11 + (n-1) \times 4$$

$$299 = 7 + 4n$$

$$292 = 4n$$

$$n = \frac{292}{4}$$

$$n = 73$$

अतः ऐसी 73 संख्याएँ हैं।

$$3. \text{ दिया है, श्रेढ़ी का 17 वाँ पद } = 2 \times (\text{आठवाँ पद}) + 5$$

$$\text{तथा श्रेढ़ी का 11 वाँ पद } = 43$$

$$\therefore a_{17} = 2 \times 98 + 5$$

$$a + (17-1)d = 2 \times [a + (8-1)d] + 5$$

$$a + 16d = 2 \times [a + 7d] + 5$$

$$a + 16d = 2a + 14d + 5$$

$$16d - 14d = 2a - a + 5$$

$$2d = a + 5 \dots 1$$

$$\therefore \text{ श्रेढ़ी का 11 वाँ पद } = 43$$

$$\therefore a + (11-1)d = 43$$

$$a + 10d = 43$$

...(1)

समीकरण (1) व (2) से

$$2d - 5 = 43 - 10d$$

$$2d + 10d = 43 + 5$$

$$12d = 48$$

$$d = \frac{48}{12} = 4$$

$$d = 4$$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर—

$$2 \times 4 = a + 5$$

$$8 = a + 5$$

$$a = 8 - 5$$

$$a = 3$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद

$$(a_n) = a + (n-1) \times d$$

$$= 3 + (n-1) \times 4$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & a = 100, d = 5 \\
 & a_n = a + (n-1)d \\
 & a_{30} = 100 + (30-1) \times 5 \\
 & \quad = 100 + 29 \times 5 \\
 & \quad = 100 + 145 \\
 & \quad = ₹ 245
 \end{aligned}$$

5. माना, समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमिक पद x, y व z हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{तब,} \quad & y - x = z - y \\
 & y + y = z + x \\
 & 2y = x + z \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

प्रथम शर्तानुसार—

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 21 \\
 y + (x + z) &= 21 \\
 y + 2y &= 21 \\
 3y &= 21 \\
 y &= \frac{21}{3} \\
 y &= 7
 \end{aligned}$$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर—

$$\begin{aligned}
 x + z &= 2 \times 7 \\
 x + z &= 14 \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

द्वितीय शर्तानुसार—

$$\begin{aligned}
 y \times z &= 63 \\
 7 \times z &= 63 \\
 z &= \frac{63}{7} \\
 z &= 9
 \end{aligned}$$

z का मान समीकरण (2) में रखने पर—

$$\begin{aligned}
 x + 9 &= 14 \\
 x &= 14 - 9 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमिक पद 5, 7 व 9 हैं।

6. माना, समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमिक पद, x, y व z हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{तब,} \quad & y - x = z - y \\
 & y + y = z + x \\
 & 2y = x + z \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

प्रथम शर्तानुसार—

$$x + y + z = 51$$

$$y + (x + z) = 51$$

$$y + 2y = 51$$

$$3y = 51$$

$$y = \frac{51}{3} \Rightarrow 17$$

$$y = 17$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर—

$$x + z = 2 \times 17$$

$$x + z = 34$$

$$z = 34 - x$$

...(2)

द्वितीय शर्तानुसार—

$$x \times z = 273$$

समीकरण (2) से z का मान रखने पर—

$$x \times (34 - x) = 273$$

$$34x - x^2 = 273$$

$$x^2 - 34x + 273 = 0$$

$$x^2 - 21x - 13x + 273 = 0$$

$$x(x - 21) - 13(x - 21) = 0$$

$$(x - 21)(x - 13) = 0$$

यदि $x - 21 = 0$, तब $x = 21$ तथा $z = 34 - 21 \Rightarrow 13$

यदि $x - 13 = 0$, तब $x = 13$ तथा $z = 34 - 13 \Rightarrow 21$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमिक पद 13, 17 व 21 हैं।

प्रश्नावली 5 c

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $= a$
सार्वअन्तर $= d$

तब, समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

2. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $= a$
अन्तिम पद $= l$
तथा श्रेढ़ी में कुल पदों की संख्या $= n$

तब समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$

3. $a = 24, d = 21 - 24 = -3$

$$S_n = 78$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$78 = \frac{n}{2}[2 \times 24 + (n-1) \times -3]$$

$$156 = n[48 - 3n + 3]$$

$$156 = n[51 - 3n]$$

$$156 = 51n - 3n^2$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$n^2 - 13n - 4n + 52 = 0$$

$$n(n-13) - 4(n-13) = 0$$

$$(n-13)(n-4) = 0$$

$$n = 13 \quad \text{तथा} \quad n = 4$$

अतः पदों की अभीष्ट संख्या या तो 4 है या 13 है।

4. $1 + (-2) + (-5) + (-8) + \dots + (-236)$

$$a = 1, d = -2 - 1 = -3, a_n = -236$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-236 = 1 + (n-1) \times -3$$

$$-236 = 1 - 3n + 3$$

$$-236 = 4 - 3n$$

$$3n = 236 + 4$$

$$3n = 240$$

$$n = \frac{240}{3} = 80$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{80}{2}[2 \times 1 + (80-1) \times -3]$$

$$= 40[2 - 79 \times 3]$$

$$= 40[2 - 237]$$

$$= 40 \times -235 = -9400$$

अतः उक्त श्रेणी का योग -9400 है।

5. तीन के प्रथम 5 गुणज

$$3, 6, 9, 12, 15$$

अतः तीन के प्रथम 5 गुणजों का योगफल $(S_5) = \frac{5}{2}[2 \times 3 + (5-1) \times 3]$

$$= \frac{5}{2}[6 + 4 \times 3]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2}[6+12] \\
 &= \frac{5}{2} \times 18 \\
 &= 5 \times 9 \Rightarrow 45
 \end{aligned}$$

6. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल $= \frac{n}{2}[1+n] = \frac{n(n+1)}{2}$

या
$$\begin{aligned}
 \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 1] &= \frac{n}{2}[2+n-1] \\
 &= \frac{n(1+n)}{2}
 \end{aligned}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $12+15+18+\dots$

$a = 12, d = 15 - 12 = 3$

$n = 20$

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 12 + (20-1) \times 3]$$

$$= 10[24 + 19 \times 3]$$

$$= 10[24 + 57] = 10 \times 81$$

$$S_n = 810$$

2. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी का पहला पद $= a$

श्रेढ़ी का अन्तिम पद $= l$

माना, श्रेढ़ी का सार्वअन्तर $= d$

तब, प्रारम्भ से r वाँ पद $= a + (r-1)d$

$$= a + rd - d \quad \dots(1)$$

तथा, अन्त से r वाँ पद $= l - (r-1)d$

$$= l - rd + d \quad \dots(2)$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के आरम्भ से r वें पद तथा अन्त से r वें पदों का योगफल

$$= (a + rd - d) + (l - rd + d)$$

$$= a + rd - d + l - rd + d$$

$$= a + l$$

सिद्ध हुआ।

3. दिया, $a_n = (3n-1)$

$$a_1 = 3 \times 1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_2 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$a_3 = 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रश्नानुसार, } S_n &= \frac{1}{2}[2a + (p-1)d] \\
 &= \frac{p}{2}[2 \times 2 + (p-1) \times 3] \\
 &= \frac{p}{2}[4 + 3p - 3] \\
 &= \frac{p}{2}[1 + 3] \\
 &= \frac{p(3p+1)}{2}
 \end{aligned}$$

4. तीन अंकों वाली सबसे छोटी 11 से विभाज्य संख्या

$$(a) = 99 + 11 \Rightarrow 110$$

तथा, तीन अंकों वाली सबसे बड़ी 11 से विभाज्य संख्या $(l) = 990$
माना, 990, श्रेढ़ी का n वाँ पद है।

$$\text{तब, } 990 = 110 + (n-1) \times 11$$

$$990 - 110 = (n-1) \times 11$$

$$\frac{880}{11} = n - 1$$

$$n - 1 = 80$$

$$n = 80 + 1 \Rightarrow 81$$

अतः तीन अंकों वाले 11 के गुणजों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$S_{81} = \frac{81}{2}[110 + 990]$$

$$= \frac{81}{2} \times 1100$$

$$= 81 \times 550 \Rightarrow 44550$$

5. $S_n = 3n^2 + 5n$

$$S_1 = 3(1)^2 + 5 \times 1$$

$$S_1 = 3 \times 1 + 5 \times 1 = 3 + 5 = 8$$

$$a = 8$$

$$S_2 = 3(2)^2 + 5(2) = 3 \times 4 + 10$$

$$S_2 = 12 + 10 = 22$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 22 - 8 = 14$$

$$S_3 = 3(3)^2 + 5 \times 3 = 3 \times 9 + 15 = 27 + 15 = 42$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = 42 - 22 = 20$$

श्रेढी 8, 14, 20...

$$a = 8, d = 14 - 8 = 6$$

$$T_k = a + (k-1)d$$

$$164 = 8 + (k-1) \times 6$$

$$164 - 8 = (k-1) \times 6$$

$$\frac{156}{6} = k - 1$$

$$26 = k - 1$$

$$k = 27$$

6. तीन अंकों वाली सबसे छोटी 7 से विभाज्य संख्या = 105

तथा तीन अंकों वाली सबसे बड़ी 7 से विभाज्य संख्या = $1001 - 7 = 994$

माना, 994 श्रेढी का n वाँ पद है।

तब, $994 = a + (n-1)d$

$$994 = 105 + (n-1) \times 7$$

$$994 - 105 = (n-1) \times 7$$

$$\frac{889}{7} = n - 1$$

$$n - 1 = 127$$

$$n = 127 + 1 \Rightarrow 128$$

अतः तीन अंकों वाले 7 के गुणजों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$= \frac{128}{2} \times [105 + 994]$$

$$= 64 \times 1099 \Rightarrow 70336$$

7. $a_n = 3 + 2n$

$$a_1 = 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$$

$$a = 5, d = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24-1) \times 2]$$

$$= 12[10 + 23 \times 2]$$

$$= 12[10 + 46] = 12 \times 56$$

$$= 672$$

8. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी 18, 16, 14,...

माना, इस समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग शून्य होगा।

यहाँ प्रथम पद $(a) = 18$ तथा सार्वअन्तर $(d) = 16 - 18 = -2$

$$\text{अब, } n \text{ पदों का योग } (S_n) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$0 = \frac{n}{2}[2 \times 18 + (n-1) \times (-2)]$$

$$\frac{0 \times 2}{n} = 36 + (n-1)(-2)$$

$$0 = 36 - 2n + 2$$

$$2n = 36 + 2$$

$$n = \frac{28}{2} \Rightarrow 14$$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी के कुल 14 पदों का योग शून्य (0) होगा।

9. 54, 51, 48,...

$$a = 54, d = 51 - 54 = -3$$

$$S_n = 513$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$513 = \frac{n}{2}[2 \times 54 + (n-1) \times -3]$$

$$1026 = n[111 - 3n]$$

$$1026 = 111n - 3n^2$$

$$3n^2 - 111n + 1026 = 0$$

$$n^2 - 37n + 342 = 0$$

$$n^2 - 19n - 18n + 342 = 0$$

$$n(n-19) - 18(n-19) = 0$$

$$(n-19)(n-18) = 0$$

$$n-19=0 \quad \text{या} \quad n-18=0$$

$$n=19 \quad \text{या} \quad n=18$$

अतः पदों की अभिष्ट संख्या = 18 या 19 दो उत्तर इसलिए हैं, क्योंकि 19वाँ पद शून्य है।

10. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद $= 9 - 5n$

$$\text{श्रेढ़ी का पहला पद } (a) = 9 - 5 \times 1$$

$$= 9 - 5 \Rightarrow 4$$

$$\text{तथा श्रेढ़ी का दूसरा पद } = 9 - 5 \times 2 = 9 - 10 \Rightarrow -1$$

$$\therefore \text{सार्वअन्तर } (d) = -1 - 4 \Rightarrow -5$$

अतः समान्तर श्रेणी के 15 पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$\begin{aligned}\therefore S_{15} &= \frac{15}{2}[2 \times 4 + (15-1) \times (-5)] \\ &= \frac{15}{2}[8 + 14 \times (-5)] \\ &= \frac{15}{2} \times [8 - 70] \\ &= \frac{15}{2} \times (-62) \\ &= 15 \times (-31) = -465\end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. $a_5 = 11, a_9 = 17$

$$\begin{aligned}a + (5-1)d &= 11 \\ a + 4d &= 11\end{aligned}\quad \dots(i)$$

$$\begin{aligned}a_9 &= 17 \\ a + (9-1)d &= 17 \\ a + 8d &= 17\end{aligned}\quad \dots(ii)$$

दोनों को घटाने पर—

$$\begin{array}{r}a + 8d = 17 \\ a + 4d = 11 \\ \hline - \quad - \quad - \\ 4d = 6 \\ d = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\end{array}$$

d का मान समी (i) में रखने पर—

$$\begin{aligned}a + 4 \times \frac{3}{2} &= 11 \\ a + 6 &= 11 \\ a &= 11 - 6 \\ a &= 5\end{aligned}$$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ से

$$\begin{aligned}S_{20} &= \frac{20}{2} \left[2 \times 5 + (20-1) \frac{3}{2} \right] \\ 10 \left[10 + 19 \times \frac{3}{2} \right] &= 10 \left[\frac{20 + 57}{2} \right]\end{aligned}$$

$$10\left[\frac{77}{2}\right] = 77 \times 5 = 385$$

$$S_{20} = 385$$

2. दिया है, समान्तर श्रेणी का आठवाँ पद = 30

तथा श्रेणी के प्रथम आठ पदों का योगफल = 156

माना, समान्तर श्रेणी का प्रथम पद = a

तथा सार्वअन्तर = d

$\therefore n$ वाँ पद = $a + (n-1)d$

$\therefore a + (8-1)d = 30$

$$a + 7d = 30$$

...(1)

$\therefore n$ पदों का योगफल $(S_n) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$\therefore \frac{8}{2}[2 \times a + (8-1)d] = 156$$

$$4 \times [2a + 7d] = 156$$

$$2a + 7d = \frac{156}{4}$$

$$2a + 7d = 39$$

...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) की घटाने पर—

$$(2a + 7d) - (a + 7d) = 39 - 30$$

$$2a + 7d - a - 7d = 9$$

$$a = 9$$

a का मान समी० (1) में रखने पर—

$$9 + 7d = 30$$

$$7d = 30 - 9$$

$$d = \frac{21}{7} = 3$$

अतः इस श्रेणी का n वाँ पद = $a + (n-1)d$

$$a_n = 9 + (n-1)3$$

$$= 9 + 3n - 3$$

$$= 3n + 6 \text{ या } 3(n+2)$$

3. दिया है, समान्तर श्रेणी 18, $15\frac{1}{2}$, 13, ..., $-49\frac{1}{2}$

$\therefore$ प्रथम पद (a) = 18 तथा सार्वअन्तर (d) = $15\frac{1}{2} - 18 = \frac{31}{2} - 18$

$$= \frac{31-36}{2} \Rightarrow \frac{-5}{2} \text{ या } -2\frac{5}{2}$$

माना, सामान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद $-49\frac{1}{2}$ है।

$$\text{तब,} \quad -49\frac{1}{2} = 18 + (n-1) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$-49\frac{1}{2} - 18 = (n-1) \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{-99-36}{2} = (n-1) \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{-135}{2} = (n-1) \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$n-1 = \frac{\left(\frac{-135}{2}\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)}$$

$$n-1 = \frac{135}{5} = 27$$

$$n = 27 + 1 \Rightarrow 28$$

∴ अभीष्ट सामान्तर श्रेढ़ी पदों की कुल संख्या 28 है।

$$\text{अब, सामान्तर श्रेढ़ी के 28 पदों का योगफल} = \frac{n}{2} [a + l]$$

$$S_{28} = \frac{28}{2} \left[18 + \left(-49\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= 14 \times \left[18 - \frac{99}{2} \right]$$

$$= 14 \times \left[\frac{36-99}{2} \right]$$

$$= 7 \times (-63) \Rightarrow -441$$

अतः सामान्तर श्रेढ़ी के पदों की कुल संख्या 28 है।

तथा इसके सभी पदों का योगफल -441 है।

4. $S_n = 636$, $a = 9$, $d = 17 - 9 = 8$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \text{ से}$$

$$636 = \frac{n}{2} [2 \times 9 + (n-1)8]$$

$$1272 = n [18 + 8n - 8]$$

$$1272 = n (10 + 8n)$$

$$\begin{aligned}
 1272 &= 10n + 8n^2 \\
 8n^2 + 10n - 1272 &= 0 \\
 8n^2 - 96n + 106n - 1272 &= 0 \\
 8n(n-12) + 106(n-12) &= 0 \\
 (n-12)(8n+106) &= 0 \\
 n &= 12, n = \frac{106}{8} \text{ (अमान्य)}
 \end{aligned}$$

अतः 12 पद लेने चाहिए।

5. समान्तर श्रेढ़ी में $\frac{a+c}{2} = b$

$$\begin{aligned}
 2n-1, 3n+2, 6n-1 \\
 \frac{2n-1+6n-1}{2} &= 3n+2 \\
 \frac{8n-2}{2} &= 3n+2 \\
 4n-1 &= 3n+2 \\
 4n-3n &= 2+1 \\
 n &= 3
 \end{aligned}$$

अतः वह संख्याएँ हैं— $2n-1, 3n+2, 6n-1$
 $2 \times 3 - 1, 3 \times 3 + 2, 6 \times 3 - 1$
 $6-1, 9+2, 18-1$
 $5, 11, 17$

6. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी का अन्तिम पद $(l) = 98$
तथा श्रेढ़ी के 30 पदों का योगफल $= 1635$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_n &= \frac{n}{2}[a+l] \\
 \therefore 1635 &= \frac{30}{2}[a+98] \\
 \frac{1635 \times 2}{30} &= a+98 \\
 109 &= a+98 \\
 a &= 1090-98 \\
 a &= 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{समान्तर श्रेढ़ी का } n \text{ वाँ पद} &= a + (n-1)d \\
 11 + (30-1) \times d &= 98 \\
 29d &= 98-11
 \end{aligned}$$

$$d = \frac{87}{3}$$

$$\therefore d = 29$$

अतः सामान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $(a) = 11$

तथा सार्वअन्तर $(d) = 29$

7. दिया है, सामान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल $= (3n^2 + 2n)$

यहाँ, $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ रखने पर—

$$\therefore \text{प्रथम पद } (a) = 3(1)^2 + 2 \times 1 = 3 + 2 \Rightarrow 5$$

$$\text{प्रथम दो पदों का योगफल } (S_2) = 3(2)^2 + 2 \times 2 = 12 + 4 \Rightarrow 16$$

$$\text{प्रथम तीन पदों का योगफल } (S_3) = 3(3)^2 + 2 \times 3 = 27 + 6 \Rightarrow 33$$

$$\text{प्रथम चार पदों का योगफल } (S_4) = 3(4)^2 + 2 \times 4 = 48 + 8 \Rightarrow 56$$

$$\text{अब, द्वितीय पद } (a_2) = S_2 - 9 = 16 - 5 \Rightarrow 11$$

$$\text{तृतीय पद } (a_3) = S_3 - S_2 = 33 - 16 \Rightarrow 17$$

$$\text{तथा चतुर्थ पद } (a_4) = S_4 - S_3 = 56 - 33 \Rightarrow 23$$

$$\therefore \text{सार्वअन्तर } (d) = 11 - 5 = 17 - 11 = 23 - 17 = 6$$

अतः अभीष्ट सामान्तर श्रेढ़ी $= 5, 11, 17, 23 \dots$

8. दिया है, सामान्तर श्रेढ़ी $-12, -9, -6, \dots, 21$

यहाँ, प्रथम पद $(a) = -12$

तथा सार्वअन्तर $(d) = -9 - (-12)$

माना, श्रेढ़ी का अन्तिम पद $21, n$ वाँ पद है

$$\therefore n \text{ वाँ पद } a + (n-1)d$$

$$21 = -12 + (n-1) \times 3$$

$$21 + 12 = (n-1) \times 3$$

$$\frac{33}{3} = n - 1$$

$$n - 1 = 11$$

$$n = 11 + 1 \Rightarrow 12$$

$\therefore$ दी गई सामान्तर श्रेढ़ी में पदों की कुल संख्या 12 है।

प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर, नई सामान्तर श्रेढ़ी

$$= -11, -8, -5 \dots, 22$$

अतः नई श्रेढ़ी के सभी पदों का योग $= \frac{n}{2}[a + l]$

$$= \frac{12}{2}[-11 + 22] = 6 \times 11 \Rightarrow 66$$

अतः दी गई सामान्तर श्रेढ़ी में पदों की कुल संख्या 12 है।

तथा नई सामान्तर श्रेढ़ी के सभी पदों का योग 66 है।

9. दिया है, समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 14 पदों का योगफल = 1078

तथा श्रेढ़ी का प्रथम पद $(a) = 12$

$$\therefore n \text{ पदों का योगफल} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\therefore 1078 = \frac{14}{2}[2 \times 12 + (14-1)d]$$

$$\frac{1078}{7} = 24 + 13d$$

$$154 - 24 = 13d$$

$$13d = 130$$

$$d = \frac{130}{13} \Rightarrow 10$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी का 20 वाँ पद $= a + (n-1)d$

$$= 12 + (10-1) \times 10 = 12 + 90 \Rightarrow 202$$

10. समान्तर श्रेढ़ी $17 + 15 + 13 + \dots$

माना, दी गई समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग 72 है।

यहाँ, प्रथम पद $(a) = 17$, तथा सार्वअन्तर $(d) = 15 - 17 = -2$

$$\therefore n \text{ पदों का योग} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\therefore \frac{n}{2}[2 \times 17 + (n-1) \times (-2)] = 72$$

$$n[34 - 2n + 2] = 72 \times 2$$

$$n(36 - 2n) = 144$$

$$36n - 2n^2 - 144 = 0$$

$$(-2) \times (n^2 - 18n + 72) = 0$$

$$n^2 - 18n + 72 = 0$$

$$n^2 - 12n - 6n + 72 = 0$$

$$n(n-12) - 6(n-12) = 0$$

$$(n-12)(n-6) = 0$$

$$\text{यदि } n-12=0, \quad \text{तब } n=12$$

$$\text{यदि } n-6=0, \quad \text{तब } n=6$$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 12 तथा प्रथम 6 पदों का योग 72 है, क्योंकि अन्तिम 6 पदों का योग शून्य हो जाएगा।

11. तीन अंकों वाली सबसे छोटी 11 से विभाज्य संख्या

$$(a) = 99 + 11 \Rightarrow 110$$

तथा, तीन अंकों वाली सबसे बड़ी 11 से विभाज्य संख्या $(l) = 990$

माना, 990, श्रेढ़ी का n वाँ पद है।

$$\text{तब, } 990 = 110 + (n-1) \times 11$$

$$990 - 110 = (n - 1) \times 11$$

$$\frac{880}{11} = n - 1$$

$$n - 1 = 80$$

$$n = 80 + 1 \Rightarrow 81$$

अतः तीन अंकों वाले 11 के गुणजों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2} [a + l]$$

$$S_{81} = \frac{81}{2} [110 + 990]$$

$$= \frac{81}{2} \times 1100 = 81 \times 550 \Rightarrow 44550$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (a) 2. (c) 3. (c) 4. (d) 5. (b) 6. (d) 7. (b) 8. (c)
9. (c) 10. (a)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (a) 2. (c) 3. (d) 4. (d)

चित्र आधारित प्रश्न

1. आकृति से पता चलता है—

$$\text{पहली सीढ़ी की चौड़ाई} = \frac{1}{2} \text{ मी}$$

$$\text{दूसरी सीढ़ी} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ मी}$$

$$\text{तीसरी सीढ़ी} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ मी}$$

इसलिए, इन सीढ़ियों की चौड़ाई है

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

यह एक समान्तर श्रेणी है, जिसमें

$$a = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2} \text{ तथा } n = 15$$

$$a_n = a + (n - 1)d \text{ से,}$$

$$a_{15} = \frac{1}{2} + (15 - 1) \times \frac{1}{2} \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{2} + 7 = \frac{15}{2} = 7.5$$

अतः चबूतरे की चौड़ाई 7.5 मीटर होगी।

2. चित्र से—

$$\text{पहली सीढ़ी की ऊँचाई} = \frac{1}{4} \text{ मीटर}$$

$$\text{दूसरी सीढ़ी की ऊँचाई} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \text{ मीटर}$$

$$\text{तीसरी सीढ़ी की ऊँचाई} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ मीटर}$$

इस प्रकार 15वीं सीढ़ी की चबूतरे की ऊँचाई होगी।

अतः $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ समान्तर श्रेणी में है।

$$\text{जहाँ } a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{4} \text{ तथा } n = 15$$

$$a_n = a + (n-1)d \text{ से,}$$

$$a_{15} = \frac{1}{4} + (15-1) \times \frac{1}{4} \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{4} + \frac{14}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a_{15} = 3.75 \text{ मीटर}$$

अतः चबूतरे की कुल ऊँचाई 3.75 मीटर होगी।

3. चबूतरे में लगी कुल कंक्रीट का आयतन सीढ़ियों के आयतन के बराबर होगा।

$$\therefore \text{पहली सीढ़ी का आयतन} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 = \frac{25}{4} \text{ घन मी}$$

($\because$ आयतन = ल० $\times$ चौ० $\times$ ऊ०)

$$\text{दूसरी सीढ़ी का आयतन} = \frac{1}{4} \times 1 \times 50 = \frac{50}{4} \text{ घन मी}$$

$$\text{तीसरी सीढ़ी का आयतन} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \times 50 = \frac{75}{4} \text{ घन मी}$$

यह देखा जा सकता है, कि इन चरणों में कंक्रीट की मात्रा समान्तर श्रेणी में है।

$$\frac{25}{4}, \frac{50}{4}, \frac{75}{4}, \dots \text{ जहाँ } a = \frac{25}{4}, d = \frac{25}{4} \text{ तथा } n = 15 \text{ है।}$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \left[2 \left(\frac{25}{4} \right) + (15-1) \times \frac{25}{4} \right]$$

$$= \frac{15}{2} \left[\frac{25}{2} + \frac{14 \times 25}{4} \right]$$

$$= \frac{15}{2} \left[\frac{25}{2} + \frac{175}{2} \right] = \frac{15}{2} \left[\frac{200}{2} \right] = \frac{15}{2} (100) = 750$$

अतः चबूतरे को बनाने के लिए आवश्यक कंक्रीट की मात्रा 750 घन मीटर है।

4. छात्र स्वयं करें।

कूट आधारित प्रश्न

1. (ii) 2. (iv)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

1. (c) 2. (a) 3. (b) 4. (b)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(i)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न :

1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न (HOTS)

1. यह देखा जा सकता है, कि पंक्तियों में लट्ठों की संख्या समान्तर श्रेणी में है।
30, 38, 26,

इस समान्तर श्रेणी के लिए

$$a = 30, d = 28 - 30 = -2$$

माना कुल 228 लट्ठों को n -पंक्तियों में रखा गया है।

$$\therefore S_n = 228$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$228 = \frac{n}{2} [2(30) + (n-1)(-2)]$$

$$228 = n(30 - n + 1) \Rightarrow 228 = n(31 - n)$$

$$\Rightarrow n^2 - 31n + 228 = 0 \Rightarrow n^2 - 19n - 12n + 228 = 0$$

$$\Rightarrow n(n-19) - 12(n-19) = 0 \Rightarrow (n-19)(n-12) = 0$$

$$n = 19 \text{ या } n = 12$$

अब, $n_n = a + (n-1)d$ से

$$a_{12} = 30 + (12-1)(-2) \Rightarrow a_{12} = 30 - 22 = 8$$

इसी प्रकार,

$$a_{19} = 30 + (19-1)(-2)$$

$$\Rightarrow a_{19} = 30 - 36 = -6$$

स्पष्ट रूप से 12वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या 8 है। जबकि, 19वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या ऋणात्मक है, जो संभव नहीं है।

अतः 12 पंक्तियों में 28 लट्ठे रखे जा सकते हैं और 12वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या 8 है।

2. माना कनिका का जेब खर्च ₹ x है।

अब, वह पहले दिन ₹ 1, दूसरे दिन ₹ 2, तीसरे दिन ₹ 3 और इसी तरह महीने के अन्त तक, इन पैसे को अपनी गुल्लक में डालती है।

अर्थात्, $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 31$

जो समान्तर श्रेणी बनाते हैं, जिसमें पद 31 और पहला पद 1 है,

सामान्य अन्तर (d) = $2 - 1 = 1$

∴ पहले पदों का योग S_{31} है।

$$\therefore n \text{ पदों का योग } S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{31} &= \frac{31}{2} [2 \times 1 + (31-1) \times 1] \\ &= \frac{31}{2} (2 + 30) = \frac{31 \times 32}{2} = 31 \times 16 = 496 \end{aligned}$$

तो, कनिका महीने के अंत तक अपने पिग्गी बैंक में ₹ 496 डालती है।

साथ ही, उसने अपनी पॉकेट मनी में से ₹ 204 खर्च किये और पाया की महीने के अंत में उसके पास अभी भी ₹ 100 है।

अब शर्त के अनुसार,

$$(x - 496) - 204 = 100 \Rightarrow x - 700 = 100$$

$$\therefore x = ₹ 800$$

अतः ₹ 800 महीने के लिए उसका जेबखर्च था।

3. दिया गया है, श्रृंखला है— $-4, -1, 2, \dots, x$

यहाँ पहला पद, $a = -4$, अन्तिम पद, $l = x$ तथा श्रृंखला का योग $s = 437$

सार्वअन्तर, $d = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$

इस श्रेणी का n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$ से,

$$x = -4 + (n-1)3 \Rightarrow \frac{x+4}{3} = n-1$$

$$\Rightarrow n = \frac{x+4}{3} + 1 \Rightarrow n = \frac{x+7}{3}$$

यहाँ श्रेणी का अन्तिम पद ' x ' है, तब n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$ से

$$437 = \frac{x+7}{3 \times 2} (-4 + x)$$

$$\Rightarrow 437 \times 6 = (x+7)(x-4)$$

$$\Rightarrow 2622 = x^2 + 7x - 4x - 28 \Rightarrow 2622 = x^2 + 3x - 28$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 2650 = 0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$\Rightarrow x^2 + 53x - 50x - 2650 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+53) - 50(x+53) = 0$$

$$\Rightarrow (x-50)(x+53) = 0$$

$$\Rightarrow x = 50 \text{ या } x = -53$$

चूँकि ऋणात्मक पूर्णांक संभव नहीं है, $x = -53$ अमान्य होगा।

$$\therefore x = 50$$

अतः x का मान 50 होगा।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) दिया है—पहली पंक्ति में 43 गुलाब, दूसरी पंक्ति में 41 गुलाब तथा तीसरी पंक्ति में 39 गुलाब। अतः यह एक समान्तर श्रेणी है—

$$43, 41, 39, \dots \text{ जहाँ } a = 43, d = 41 - 43 = -2$$

यदि अंतिम पंक्ति में 11 गुलाब है तब

$$43, 41, 39, \dots, 11$$

$$a = 43, d = 41 - 43 = -2, a_n = 11$$

तब $a_n = a + (n-1)d$ से

$$11 = 43 + (n-1)(-2) \Rightarrow 11 - 43 = (n-1)(-2)$$

$$-32 = (n-1)(-2) \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

अतः इसमें कुल 17 पंक्तियाँ होगी।

2. (b) दी गयी श्रृंखला में गुलाब के पौधों की संख्या 43, 41, 39,

$$7\text{वीं पंक्ति में गुलाब } a_7 = a + (7-1)d$$

$$= 43 + 6 \times (-2) = 43 - 12 = 31$$

$$13\text{वीं पंक्ति में गुलाब } a_{13} = a + (13-1)d$$

$$= 43 + 12(-2) = 43 - 24 = 19$$

अतः दोनों पंक्तियों के पौधों में अंतर $31 - 19 = 12$ होगा।

3. (d) दी गई श्रृंखला, 43, 41, 39, में

$$15\text{वीं पंक्ति में गुलाब } x = a_{15} = a + (15-1)d$$

$$= 43 + (14)(-2) = 43 - 28 = 15$$

अतः x का मान 15 है।

4. (c) दी गयी श्रृंखला 43, 41, 39, में

$$\text{छठी पंक्ति में गुलाब के पौधे, } a_6 = a + (6-1)d$$

$$= 43 + (5)(-2) = 43 - 10 = 33$$

अतः छठी पंक्ति में गुलाब के पौधों की संख्या 33 है।

5. दी गयी श्रृंखला 43, 41, 39, में

$$5\text{वीं पंक्ति में गुलाब के पौधे, } a_5 = a + (5-1)d = 43 + (4)(-2) = 43 - 8 = 35$$

$$8\text{वीं पंक्ति में गुलाब के पौधे, } a_8 = a + (7-1)d = 43 + 6(-2) = 43 - 12 = 31$$

अतः 5वीं पंक्ति व 8वीं पंक्ति में गुलाब के पौधों की कुल संख्या $(35 + 31) = 66$ होगी।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (a) दिया है की पहली किस्त 1000 रुपये है और हर महीने 100 रुपये की किस्त बढ़ायी जाती है, अतः यह एक समान्तर श्रेणी बनती है।

$$\therefore n \text{ की किस्त } a_n = a + (n-1)d$$

जहाँ पहला पद, $a = 1000$, सार्वअन्तर, $d = 100$

$$\begin{aligned} 30\text{वीं किस्त } a_{30} &= a + (30-1)d \\ &= 1000 + (29)(100) \\ &= 1000 + 2900 = 3900 \end{aligned}$$

अतः 30वीं किस्त में ₹ 3900 की राशि भुगतान की जायेगी।

2. (b) प्रथम 30 किस्तों में भुगतान की गई कुल राशि ज्ञात करने के लिए, समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों के योग के सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

30 किस्तों में भुगतान की गयी कुल राशि

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{30}{2} [2 \times 1000 + (30-1)(100)] \\ &= 15 [2000 + 2900] = 15 \times 4900 = 73500 \end{aligned}$$

अतः 30 किस्तों में भुगतान की गयी कुल राशि ₹ 73500 होगी।

3. (c) 30 किस्तों तक जमा की गयी कुल राशि = ₹ 73500

कुल लोन की राशि = ₹ 118000

शेष बची राशि = ₹ 118000 - ₹ 73500 = ₹ 44500

अतः 30वीं किस्त के बाद ₹ 44500 शेष राशि जमा करनी होगी।

4. (d) माना किस्तों की संख्या ' n ' है, तब कुल लोन की राशि ₹ 118000 है। तब

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$118000 = \frac{n}{2} [2 \times 1000 + (n-1)(100)]$$

इसका हल निकालने पर, $n = 40$

अतः जमा की गयी कुल किस्तों की संख्या 40 होगी।

5. (a) अन्तिम किस्त 40वी होगी,

$$\begin{aligned} \text{अतः 40वीं किस्त का भुगतान } a_{40} &= a + (40-1)d \\ &= 1000 + (39)(100) \\ &= 1000 + 3900 \\ &= ₹ 4900 \end{aligned}$$

अतः अन्तिम किस्त में भुगतान की गयी राशि ₹ 4900 होगी।



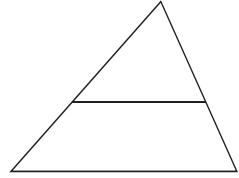
प्रश्नावली 6 A

1. सत्य कथन, (i), (iii), (v), (viii), असत्य कथन : (ii), (iv), (vi) व (vii), 2. हाँ

प्रश्नावली 6 B

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

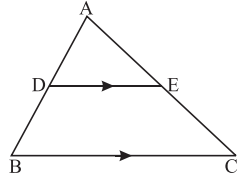
1. दिया है, किसी त्रिभुज में एक भुजा के मध्य बिन्दु के आधार समान्तर एक रेखाखण्ड खींचा गया है।
 $\therefore$ हम जानते हैं, कि “किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”



अतः आधार के समान्तर रेखाखण्ड तीसरी भुजा को मध्य बिन्दु पर विभाजित करेगा।

$\therefore$ तीसरी भुजा का विभाजन अनुपात = 1 : 1

2. दिया है, $DE \parallel BC$, $AD = 4.0$ सेमी
 $DB = 3.0$ सेमी तथा $BC = 10.5$ सेमी
 हम जानते हैं, कि—“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”



$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{अथवा} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{अब} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\therefore \frac{4.0}{(4+3)} = \frac{DE}{10.5} \quad \{\because AB = AD + DB\}$$

$$\frac{4.0 \times 10.5}{7.0} = DE$$

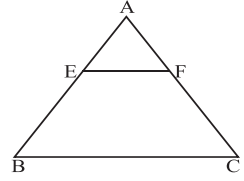
$$DE = \frac{42}{7} \Rightarrow 6 \text{ सेमी}$$

अतः DE की लम्बाई 6 सेमी है।

3. दिया है, $\triangle ABC$ में; $EF \parallel BC$, $AE = 4$ सेमी,
 $EB = 6$ सेमी, $AF = 2$ सेमी

हम जानते हैं कि,—“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AE}{EB} &= \frac{AF}{FC} \\ \frac{4}{6} &= \frac{2}{FC} \\ FC &= \frac{2 \times 6}{4} \Rightarrow 3 \text{ सेमी}\end{aligned}$$

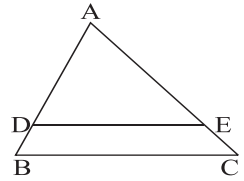


अब, $AC = AF + FC = (2 + 3) \text{ सेमी} \Rightarrow 5 \text{ सेमी}$
अतः AC की माप 5 सेमी है।

4. दिया है, $DE \parallel BC$, $AD : BD = 4 : 1$ तथा $AE = 6$ सेमी।

हम जानते हैं, कि—“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AD}{BD} &= \frac{AE}{EC} \\ \frac{4}{1} &= \frac{6}{EC} \\ EC &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1.5 \text{ सेमी}\end{aligned}$$



अतः EC की लम्बाई 1.5 सेमी है।

5. $OM \parallel DC$, $OM \parallel AB$

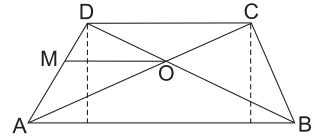
$$\triangle ADC \quad \frac{AM}{DM} = \frac{OA}{OC} \quad \dots(1)$$

$$\triangle ADB \quad OM \parallel AB \quad \frac{AM}{DM} = \frac{OB}{OD} \quad \dots(2)$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$



6. दिया है, दो समरूप त्रिभुजों $\triangle PQR$ तथा $\triangle LMN$ की संगत भुजाएँ PQ और LM क्रमशः 2.4 सेमी और 3.2 सेमी हैं।

$$\begin{aligned}\therefore \text{दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात} &= \frac{PQ}{LM} \\ &= \frac{2.4}{3.2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 : 4\end{aligned}$$

अतः इन दोनों समरूप त्रिभुजों की परिमाप का भी अनुपात 3 : 4 होगा।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है : $\triangle ABC$ की भुजाओं AB तथा AC को एक ऋजु रेखा DE क्रमशः बिन्दुओं D तथा E पर इस प्रकार काटती है कि—

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \quad \text{या} \quad AD : DB = AE : EC$$

सिद्ध करना है : $DE \parallel BC$

उपपत्ति : यदि DE, BC के समान्तर नहीं हैं, तो $DE' \parallel BC$ खींच लीजिए।

$$\therefore DE' \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \quad \text{या} \quad AD : DB = AE' : E'C$$

परन्तु $AD : DB = AE : EC$ (दिया है)

$\therefore$ बिन्दु E तथा E' संपाती हैं।

अतः $DE \parallel BC$

इति सिद्धम्

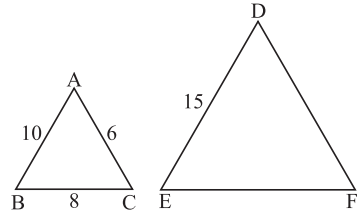
2. दिया है, $\triangle ABC$ में $AB = 10$ सेमी, $BC = 8$ सेमी, $CA = 6$ सेमी तथा $\triangle ABC$ के समरूप $\triangle DEF$ में— $DE = 15$ सेमी जो AB की संगत भुजा है।

$$\text{तब,} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{8}{EF} = \frac{6}{DF}$$

$$\therefore EF = \frac{8 \times 15}{10} = \frac{120}{10} \Rightarrow 12 \text{ सेमी} \circ$$

$$\text{तथा} \quad DF = \frac{6 \times 15}{10} = \frac{90}{10} \Rightarrow 9 \text{ सेमी} \circ$$



अतः DF तथा EF की लम्बाई क्रमशः 9 सेमी तथा 12 सेमी हैं।

3. दिया है, $A \perp BC, BC \parallel PQ, BC = 12.0$ सेमी, $AD = 8.0$ सेमी तथा $LD = 3.0$ सेमी

हम जानते हैं, कि—“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

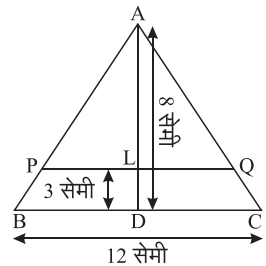
$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ} = \frac{AD}{AL}$$

$$\therefore AD = 8 \text{ सेमी} \circ \text{ तथा } LD = 3 \text{ सेमी} \circ$$

$$\therefore AL = AD - LD = (8 - 3) \text{ सेमी} \Rightarrow 5 \text{ सेमी}$$

$$\text{अब,} \quad \frac{AD}{AL} = \frac{BC}{PQ}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{12}{PQ}$$



$$PQ = \frac{12 \times 5}{8} \Rightarrow \frac{60}{8} \Rightarrow 7.5 \text{ सेमी}$$

अतः PQ की माप 7.5 सेमी है।

4. दिया है, $AD : DB = 2 : 3$ तथा $DE \parallel BC$

हम जानते हैं, कि—“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

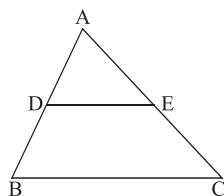
$$\therefore AD : DB = AE : EC$$

$$\text{तथा } AD : AB = AE : AC$$

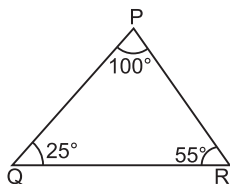
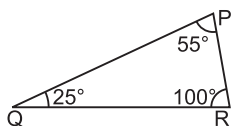
$$(i) \text{ अतः } AE : EC = 2 : 3$$

$$\text{अब, } AD : AB = AD : (AD + DB) \\ = 2 : (2 + 3) \Rightarrow 2 : 5$$

$$(ii) \text{ अतः } AE : AC = 2 : 5$$



5.



अतः $\triangle QPR \sim \triangle TSM$ नहीं है।

क्योंकि $\triangle PQR \sim \triangle TSM$

6. दिया है, $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ दो समरूप त्रिभुज हैं, जिनमें $AB = 4.2$ सेमी,

$BC = 3.6$ सेमी, तथा $AC = 4.8$ सेमी

$\therefore AB$ की संगत भुजा $DE = 2.1$ सेमी है।

$\therefore BC$ तथा AC की संगत भुजाएँ

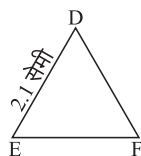
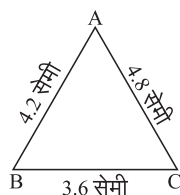
क्रमशः EF तथा DF होंगी।

$$\text{अब, } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \frac{4.2}{2.1} = \frac{3.6}{EF} = \frac{4.8}{DF} = \frac{2}{1}$$

$$\text{अब: } EF = \frac{3.6}{2} \Rightarrow 1.8 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } DF = \frac{4.8}{2} \Rightarrow 2.4 \text{ सेमी}$$

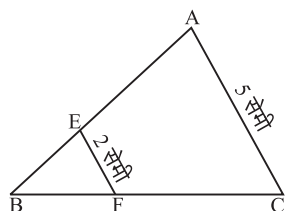


7. दिया है, $\triangle ABC$ में—

$$EF \parallel AC$$

यदि $EF = 2$ सेमी तथा $AC = 5$ सेमी

$$\text{अब, } \frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC}$$



$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC}$$

$$\therefore AB = BE + EA$$

$$\text{अब, } \frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{BE + EA} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{2 + EA} = \frac{2}{5}$$

$$EA = 5 - 2 \Rightarrow 3$$

$$\text{अतः } BE : EA = \frac{BE}{EA} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 : 3$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

$$1. \text{ दिया है, } \frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से,

$$DE \parallel AB$$

$$\Rightarrow \angle CDE = \angle CAB \text{ (संगत कोण)}$$

$$\Rightarrow \angle CBA = \angle CAB \text{ } [\because \angle CDE = \angle CED \text{ दिया है}]$$

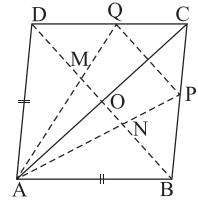
$$CA = CB \text{ } [\because \text{बराबर कोणों की विपरीत भुजाएँ भी बराबर होती हैं}]$$

अतः $\triangle CAB$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$2. \text{ दिया है, चतुर्भुज } ABCD \text{ में भुजा } AB = DA, \\ \angle CAD \text{ का अर्द्धक } = AQ$$

$$\therefore \angle DAQ = \angle QAC = \frac{\angle DAC}{2}$$

$$\text{तथा } \angle CAP = \angle PAB = \frac{\angle CAB}{2}$$



माना, रेखा BD , AQ व AP को क्रमशः बिन्दु M तथा N पर प्रतिच्छेद करती है।

$\triangle AMN$ तथा $\angle AQP$ में—

$$\therefore DQ = QC = \frac{DC}{2}$$

$$\therefore \angle AMN = \angle AQP$$

$$\angle MAN = \angle QAP$$

{उभयनिष्ठ}

$$\text{तथा } \frac{AM}{AN} = \frac{AQ}{AP}$$

$$\therefore \triangle AMN \sim \triangle AQP$$

{कोण-कोण समरूपता से}

$$\text{तब } \frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AP}$$

$$\Rightarrow AM : AQ = AN : AP$$

$$\therefore PQ \parallel MN$$

$$\text{अतः } PQ \parallel BD$$

3. दिया है, $AB \parallel DC$, $DC = 2AB$,

$$EF \parallel AB \quad \text{तथा} \quad \frac{BE}{EC} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 4 \cdot BE = 3 \cdot EC$$

सिद्ध करना है, $7FE = 10AB$

$\triangle DFG$ तथा $\triangle DAB$ में—

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle FDG = \angle ADB$$

$$\therefore \triangle DFG \sim \triangle DAB$$

$$\text{अब,} \quad \frac{DF}{DA} = \frac{FG}{AB}$$

समलम्ब $ABCD$ में—

$$EF \parallel AB \parallel DC$$

(दिया है)

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{BE}{EC}$$

$$\frac{AF}{DF} = \frac{3}{4}$$

$$\left\{ \therefore \frac{BE}{EC} = \frac{3}{4} \right\}$$

$$\frac{AF}{DF} + 1 = \frac{3}{4} + 1$$

$$\frac{AF + DF}{DF} = \frac{3 + 4}{4}$$

$$\frac{AD}{DF} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \frac{DF}{AD} = \frac{4}{7}$$

...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{FG}{AB} = \frac{4}{7}$$

$$\therefore FG = \frac{4}{7} AB$$

...(3)

अब, $\triangle BEG$ तथा $\triangle BCD$ में—

$$\angle GBE = \angle DBC$$

(उभयनिष्ठ)

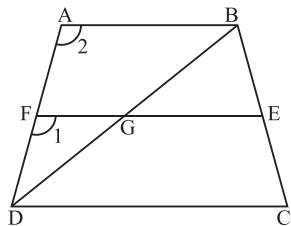
$$\text{तथा} \quad \angle BEG = \angle BCD$$

$$\left\{ \therefore DC \parallel EF \right\}$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BCD$$

{कोण-कोण समरूपता से}

$$\text{अब,} \quad \frac{BE}{BC} = \frac{EG}{CD}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \frac{EC}{BE} &= \frac{4}{3} \\
 1 + \frac{EC}{BE} &= 1 + \frac{4}{3} \\
 \frac{BE + EC}{BE} &= \frac{3 + 4}{3} \\
 \frac{BC}{BE} &= \frac{7}{3} \\
 \therefore \quad \frac{BE}{BC} &= \frac{3}{7} \\
 \therefore \quad \frac{BE}{BC} &= \frac{EG}{CD} \quad \therefore \quad \frac{EG}{CD} = \frac{3}{7} \\
 EG &= \frac{3}{7} CD
 \end{aligned}$$

$$EG = \frac{3}{7} \times (2AB) \quad \{\because CD = 2AB\}$$

$$EG = \frac{6}{7} AB \quad \dots(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर—

$$EG + FG = \frac{6}{7} AB + \frac{4}{7} AB$$

$$EF = \left(\frac{6+4}{7} \right) AB$$

$$EF = \frac{10}{7} AB$$

$$\text{अतः} \quad 7 \cdot EF = 10 \cdot AB$$

सिद्ध हुआ।

4. दिया है, $PQ \parallel BC$

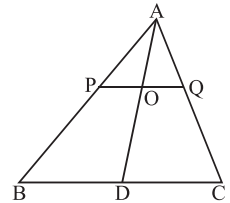
$\therefore AD, \triangle ABC$ की BC पर माध्यिका है।

$$\therefore \quad BD = DC = \frac{BC}{2}$$

माना, माध्यिका AD, PQ को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है, AD, PQ को समद्विभाजित करती है।

$$\text{या} \quad PO = OQ = \frac{PQ}{2}$$



अब, $\triangle APQ$ तथा $\triangle ABC$ में—

$$\angle APQ = \angle ABC$$

$$\{\because PQ \parallel BC\}$$

$$\angle PAQ = \angle BCA$$

$$\{\text{उभयनिष्ठ}\}$$

$$\therefore \quad \triangle APQ \sim \triangle ABC$$

(कोण-कोण समरूपता से)

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \quad \dots(1)$$

तथा $\triangle AOP$ तथा $\triangle ABD$ में—

$$\begin{aligned} \angle APO &= \angle ABD & \{ \because PQ \parallel BC \} \\ \angle PAO &= \angle BAD & \{ \text{उभयनिष्ठ} \} \\ \therefore \triangle PAO &\sim \triangle BAD & \{ \text{कोण-कोण समरूपता से} \} \\ \therefore \frac{AP}{AB} &= \frac{PQ}{BD} & \dots(2) \end{aligned}$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{BC} &= \frac{PO}{BD} \\ \frac{PQ}{2BD} &= \frac{PQ}{BD} & \left\{ \because BD = DC = \frac{BC}{2} \right\} \\ \frac{PQ}{2} &= PO \\ PQ &= 2PO \\ \therefore PQ &= PO + OQ \\ 2PO - PO &= OQ \\ PO &= OQ \\ \therefore PO &= OQ = \frac{PQ}{2} \end{aligned}$$

अतः माध्यिका AD , PQ को समद्विभाजित करती है।

सिद्ध हुआ।

5. दिया है, $DE \parallel AB$, $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, उसकी अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

$$\begin{aligned} \frac{3x+19}{x+3} &= \frac{3x+4}{x} \\ x(3x+19) &= x+3(3x+4) \\ 3x^2 + 19x &= 3x^2 + 4x + 9x + 12 \\ 19x &= 13x + 12 \\ 6x &= 12 \\ x &= \frac{12}{6} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 6C

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. हाँ समरूप है, यदि दो त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती है तो त्रिभुज समरूप होता है।

2. दिया है, $\triangle DEF$ तथा $\triangle RPQ$ समरूप हैं।

तब $\angle D = \angle R$ और $\angle F = \angle Q$ होगा

परन्तु हमें दिया है, $\angle D = \angle R$ तथा $\angle F = \angle P$ जोकि असत्य होगा।

3. दिया है, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, $\angle F = 20^\circ$ तथा $\angle D = 10^\circ$

$\triangle ABC$ में— $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$\angle A + 30^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 50^\circ$$

$$\therefore \angle A = 120^\circ$$

$\triangle DEF$ में— $\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$

$$10^\circ + \angle E + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\angle E = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\therefore \angle E = 150^\circ$$

यहाँ, $\angle A \neq \angle D$ तथा $\angle B \neq \angle E$

$$\therefore \triangle ABC \not\cong \triangle DEF$$

अतः $\triangle ABC$ तथा $\triangle DEF$ समरूप नहीं हैं।

4. माना, पहला त्रिभुज $\triangle ABC$ है, जिसमें $\angle A = 75^\circ$ तथा $\angle B = 55^\circ$ है। तथा दूसरा त्रिभुज $\triangle PQR$ है, जिसमें $\angle P = 50^\circ$ व $\angle Q = 55^\circ$ है।

अब, $\triangle ABC$ में—

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\therefore \angle C = 50^\circ$$

तथा $\triangle PQR$ में—

$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

$$50^\circ + 55^\circ + \angle R = 180^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - 105^\circ$$

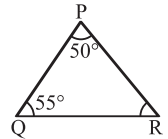
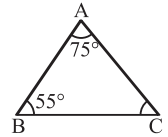
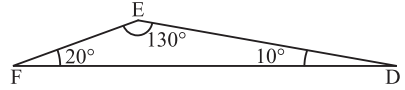
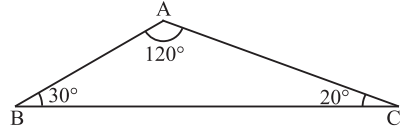
$$\angle R = 75^\circ$$

यहाँ, $\angle A = \angle R = 75^\circ$, $\angle B = \angle Q = 55^\circ$

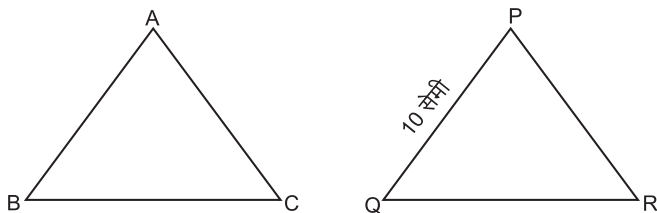
तथा $\angle C = \angle P = 50^\circ$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle RQP$$

अतः दोनों त्रिभुज समरूप हैं।



5.



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{36}{24}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AB}{10} = \frac{3}{2}$$

$$AB = \frac{10 \times 3}{2} = \frac{30}{2}$$

$$AB = 15 \text{ सेमी}$$

6. दिया है, 1.8 मी लम्बे डण्डे की छाया की माप = 60 सेमी

माना, मीनार की ऊँचाई x मीटर है, जिसकी छाया की माप 40 मी है।

तब, $1.8 : x = \frac{60}{100} : 40$

$$\frac{1.8}{x} = \frac{0.6}{40}$$

$$1.8 \times 40 = 0.6 x$$

$$x = \frac{1.8 \times 40}{0.6} = 3 \times 40 \Rightarrow 120 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 120 मीटर है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है—

यहाँ, $\angle B = \angle R = x$,

तथा $\angle C = \angle Q = y$

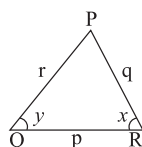
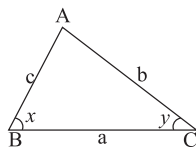
$\therefore \angle A = \angle P = 180^\circ - x - y$

अतः $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$

तब, $\frac{AB}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \frac{c}{q} = \frac{b}{r} = \frac{a}{p}$

अब, (i) $\frac{a}{p} = \frac{b}{r} = \frac{c}{q}$ तथा (ii) $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$



2. माना, पहला त्रिभुज $\triangle ABC$ तथा दूसरा $\triangle PQR$ है, जिनमें $\angle A = \angle P$

माना, AD, BC को $x : y$ के अनुपात में विभाजित करती है।

तथा PS, QR को $x : y$ के अनुपात में ही विभाजित करती है।

$$\therefore \angle BAC = \angle QPR$$

$$\text{तथा} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{QS}{SR} = \frac{x}{y}$$

$$\text{तब,} \quad \angle B = \angle Q$$

$$\text{तथा} \quad \angle C = \angle R$$

$$\text{यहाँ,} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$$

$$\text{तथा} \quad \angle C = \angle R$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

अतः $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ समरूप हैं।

3. दिया है, दो त्रिभुज समरूप हैं।

$$\text{माना,} \quad \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

$$\text{तब,} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$$

$$\text{तथा} \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

माना, AD व PS , क्रमशः $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ की माध्यिकाएँ हैं।

$$\text{तब,} \quad BC = 2BD \text{ तथा } QR = 2QS$$

$$\therefore \frac{2BD}{2QS} = \frac{AB}{PQ} \Rightarrow \frac{BD}{QS} = \frac{AB}{PQ}$$

सिद्ध हुआ।

अतः दो समरूप त्रिभुजों की संगत माध्यिकाएँ संगत भुजाओं के अनुपात के अनुपात में होती हैं।

4. ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की लम्बाई = 6 मीटर
स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई = 4 मीटर
मीनार की छाया की लम्बाई = 28 मीटर
माना मीनार की लम्बाई = x

$$6 : x = 4 : 28$$

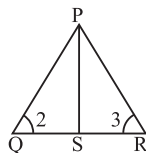
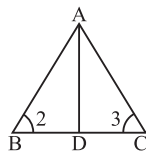
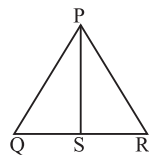
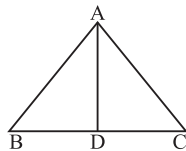
$$\frac{6}{x} = \frac{4}{28}$$

$$x = \frac{6 \times 28}{4}$$

$$x = 6 \times 7$$

$$x = 42 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की लम्बाई 42 मीटर है।



5. दिया है, दो त्रिभुज समरूप हैं।

माना, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

तब, $\angle A + \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$

तथा $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

माना, ΔABC में भुजा BC पर शीर्ष लम्ब AD तथा

ΔPQR में भुजा QR पर शीर्ष लम्ब PS है।

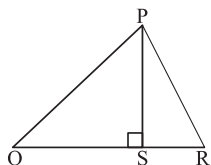
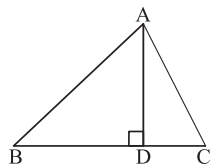
अब, ΔABD तथा ΔPQS में—

$\angle ABD = \angle PQS$ $\{\because \Delta ABC \sim \Delta PQR\}$

तथा $\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$ $\{\because AD$ व PS शीर्ष लम्ब हैं}

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta PQS$

तब, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS}$



सिद्ध हुआ।

अतः दो समरूप त्रिभुजों कि संगत शीर्ष लम्ब का अनुपात संगत भुजाओं के अनुपात के बराबर होता है।

6. दिया है, दो त्रिभुजों ΔABC तथा ΔDBC का एक ही कर्ण BC है।

तथा BC और AD एक दूसरे को बिन्दु P पर विभाजित करते हैं।

जहाँ, $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$ सिद्ध करना है—

$$AP \times PC = BP \times PD$$

अब, ΔAPB तथा ΔDPC में—

$$\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$$

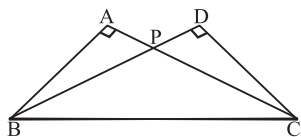
(दिया है)

तथा $\angle APB = \angle DPC$

$\therefore \Delta APB \sim \Delta DPC$

तब, $\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC}$

अतः $[AP \times PC = BP \times PD]$

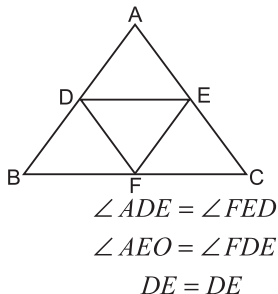


{शीर्षाभिमुख कोण}

सिद्ध हुआ।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.



$$\angle ADE = \angle FED$$

$$\angle AEO = \angle FDE$$

$$DE = DE$$

ΔADE व ΔDFE में

$$DF \parallel AE$$

DE एक तिर्यक छेदी रेखा है।

(एकान्तर कोण)

(एकान्तर कोण)

(उभयनिष्ठ)

$$\Delta ADE \cong \Delta DFE$$

ΔDFE व ΔEFC में

$$DF \parallel EC$$

FE एक तिर्यक छेदी रेखा है।

$$\angle DEF = \angle CFE \quad (\text{एकान्तर कोण})$$

$$\angle DFE = \angle CEF \quad (\text{एकान्तर कोण})$$

$$FE = FE \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

AAS से, $\Delta DFE \cong \Delta EFC$

इसी प्रकार से ΔDEF व ΔBDF में

$$EF \parallel DB$$

DF एक तिर्यक छेदी रेखा है।

$$\angle DFE = \angle FDB \quad (\text{एकान्तर कोण})$$

$$\angle EDF = \angle BFD \quad (\text{एकान्तर कोण})$$

$$DF = DF \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

AAS सर्वांगसमता से—

$$\Delta ADE \cong \Delta DBF \cong \Delta DEF \cong \Delta EFC$$

2. दिया है— ΔABC में AD , $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

जो BC को बिन्दु D पर समद्विभाजित करता है।

तब, $\angle BAD = \angle DAC$

तथा $BD = DC$

अब, ΔABD तथा ΔADC में

$$\angle BAD = \angle DAC \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{भुजा } BD = DC \quad (\text{दिया है})$$

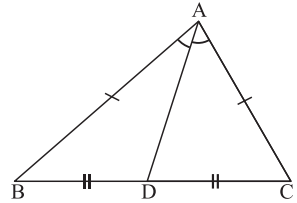
तथा $AD = AD$ {उभयनिष्ठ}

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ADC$ {SAS सर्वांगसमता से}

तब, ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

अतः ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध हुआ।



3. दिया है, चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC , $\angle C$ तथा $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

तब, $\angle BAC = \angle DAC$

तथा $\angle ACB = \angle ACD$

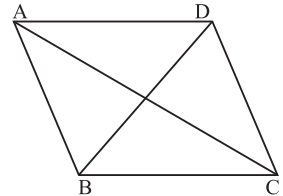
अब, ΔABC तथा ΔADC में—

$$\angle BAC = \angle DAC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle ACB = \angle ACD \quad (\text{दिया है})$$

तथा $AC = AC$ {उभयनिष्ठ}

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADC$



तब, $\left[\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \right]$

सिद्ध हुआ।

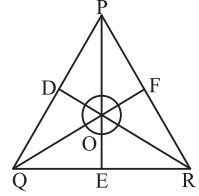
4. दिया है, ΔPQR में—

$\angle POQ, \angle QOR$ तथा $\angle ROP$ के समद्विभाजक RD, PE तथा QF हैं।

$$\therefore \frac{\angle POQ}{2} = \angle POD = \angle DOQ$$

$$\frac{\angle QOR}{2} = \angle QOE = \angle EOR$$

$$\text{तथा } \frac{\angle ROP}{2} = \angle POF = \angle FOR$$



अब, ΔPOD तथा ΔDOQ में—

$$\angle POD = \angle DOQ$$

{लम्ब समद्विभाजक द्वारा बने कोण}

$$\angle DPO = \angle DQO$$

{संगत कोण}

$$\therefore \Delta POD \sim \Delta DOQ$$

$$\text{तब, } \frac{PD}{DQ} = \frac{PO}{OQ}$$

...(1)

अब, ΔQOE तथा ΔEOR में—

$$\angle QOE = \angle EOR$$

{लम्ब समद्विभाजक द्वारा बने कोण}

$$\angle OQE = \angle ORE$$

{संगत कोण}

$$\therefore \Delta QOE \sim \Delta EOR$$

$$\text{तब, } \frac{QE}{ER} = \frac{OQ}{OR}$$

...(2)

अब, ΔROF तथा ΔPOF में—

$$\angle ROF = \angle POF$$

{लम्ब समद्विभाजक द्वारा बने कोण}

$$\angle ORF = \angle OPF$$

{संगत कोण}

$$\therefore \Delta ROF \sim \Delta POF$$

$$\text{तब, } \frac{FR}{PF} = \frac{OR}{PO}$$

...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को गुणा करने पर—

$$\frac{PD}{DQ} \times \frac{QE}{ER} \times \frac{FR}{PF} = \frac{PO}{OQ} \times \frac{OQ}{OR} \times \frac{OR}{PO}$$

$$\frac{PD \times QE \times FR}{DQ \times ER \times PF} = 1$$

$$\text{अतः } [PD \cdot QE \cdot RF = DQ \cdot ER \cdot FP]$$

सिद्ध हुआ।

5. दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel CD$ तथा उसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उपपत्ति : $\therefore AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$ (एकान्तर कोण युग्म)

और $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अब, $\triangle AOB$ और $\triangle OCD$ में,

$$\angle AOB = \angle COD$$

तथा $\angle OAB = \angle OCD$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$\therefore$ AA समरूपता कसौटी से,

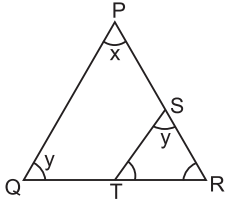
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

इति सिद्धम्

6.



दिया है, $\angle P = \angle RTS$

$\angle PRQ = \angle SRT$ (उभयनिष्ठ)

तब तीसरा कोण भी समान होगा।

$$\angle PQR = \angle TSR$$

कोण-कोण समरूपता से—

$$\triangle RPQ \sim \triangle RTS$$

इति सिद्धम्

7. माना, तीन समान्तर रेखाएँ l, m व n हैं।

तथा दो तिर्यक रेखाएँ AB व DD हैं, जो l, m, n को क्रमशः P, Q, R तथा E, F, G बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है, $\frac{PQ}{QR} = \frac{EF}{FG}$

माना, $PM \parallel CD$

अब, $\triangle PRM$ तथा $\triangle PQL$ में—

$$\angle RPM = \angle QPL$$

$$\angle PRM = \angle PQL$$

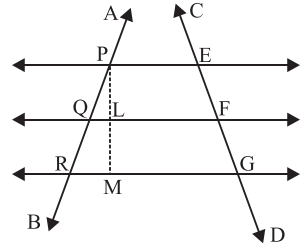
$\therefore \triangle PRM \sim \triangle PQL$

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{PM}{PL}$$

$$\frac{PR}{PQ} - 1 = \frac{PM}{PL} - 1$$

{उभयनिष्ठ}

{संगत कोण}



...(1)

$$\frac{PR - PQ}{PQ} = \frac{PM - PL}{PL}$$

$$\frac{QR}{PQ} = \frac{LM}{PL} \quad \dots(2)$$

$\therefore PM \parallel CD$

इसी प्रकार, $\frac{QR}{PQ} = \frac{FG}{EF} \quad \dots(3)$

समीकरण (2) व (3) से—

$$\frac{QR}{PQ} = \frac{LM}{PL} = \frac{FG}{EF}$$

$$\frac{QR}{PQ} = \frac{FG}{EF} \Rightarrow \left[\frac{PQ}{QR} = \frac{EF}{FG} \right] \quad \text{सिद्ध हुआ।}$$

अतः तीन समांतर रेखायें किन्हीं दो तिर्यक रेखाओं की समानुपाती रेखाखण्डों में काटती हैं।

8. दिया है, $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज हैं।

तथा CD का मध्य-बिन्दु M है।

तथा AC एक विकर्ण है।

सिद्ध करना है— $EL = 2BL$

अब, $\triangle BCM$ तथा $\triangle EDM$ में—

$$\angle DME = \angle BCM$$

$$DM = CM$$

तथा $\angle DEM = \angle MBC$

$$\therefore \triangle BCM \cong \triangle EDM$$

$$\therefore BC = DE$$

$$\therefore BC = AD$$

दोनों को जोड़ने पर—

$$2 \cdot BC = DE + AD$$

$$2BC = AE$$

$\dots(1)$

अब, $\triangle AEL$ तथा $\triangle CBL$ में—

$$\angle ALE = \angle BLC$$

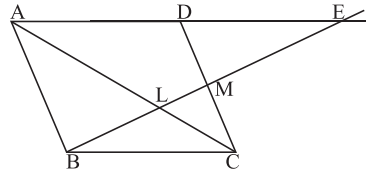
$$\angle AEL = \angle EBC$$

$$\therefore \triangle AEL \sim \triangle CBL$$

तब, $\frac{AE}{BC} = \frac{EL}{BL}$

$$AE = \frac{EL}{BL} \times BC$$

समीकरण (1) से AE का मान रखने पर—



{शीर्षाभिमुख कोण}

{ $\therefore M, DC$ का मध्य-बिन्दु है}

{एकान्तर कोण}

{ASA सर्वांगसमता से}

{समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ}

$$\frac{EL}{BL} \times BC = 2BC$$

$$\frac{EL}{BL} = 2$$

अतः $[EL = 2 \cdot BL]$

सिद्ध हुआ।

9. दिया है, $AP = 2$ सेमी, $PB = 4$ सेमी, $AQ = 3$ सेमी, $QC = 6$ सेमी

$$\text{अब, } \frac{AP}{PB} = \frac{2 \text{ सेमी}}{4 \text{ सेमी}} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\text{तथा } \frac{AQ}{QC} = \frac{3 \text{ सेमी}}{6 \text{ सेमी}} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\therefore AP : PB = AQ : QC$$

$$\therefore PQ \parallel BC$$

अब, ΔAPQ तथा ΔABC में—

$$\angle PAQ = \angle BAC$$

$$\angle APQ = \angle ABC$$

$$\therefore \Delta APQ \sim \Delta ABC$$

$$\text{तब, } \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{2 \text{ सेमी}}{(2+4) \text{ सेमी}} = \frac{3 \text{ सेमी}}{(3+6) \text{ सेमी}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\text{अतः } [BC = 3 \cdot PQ]$$

सिद्ध हुआ।

10. ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई = 10 सेमी

ऊर्ध्वाधर छड़ की छाया = 8 सेमी

ऊर्ध्वाधर मीनार की छाया = 30 मीटर

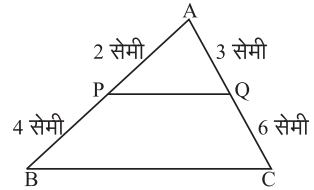
माना मीनार की ऊँचाई = x मीटर

$$10 : x = 8 : 30$$

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{30}$$

$$x = \frac{10 \times 30}{8} = \frac{300}{8}$$

$$x = 37.5 \text{ मीटर}$$



{उभयनिष्ठ}

{ $\therefore PQ \parallel BC$ }

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (c) 3. (b) 4. (d) 5. (b) 6. (a) 7. (b) 8. (c)
9. (d) 10. (a)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (a) 4. (b)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से—

$\triangle ACP$ में,

$$\sin 60^\circ = \frac{PC}{AP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{AP}$$

$$\Rightarrow PA = 36\sqrt{3}$$

अतः $PA = 36\sqrt{3}$ मीटर होगी।

2. चित्र से—

$\triangle PCB$ में,

$$\sin 30^\circ = \frac{PC}{PB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{18}{PB}$$

$$PB = 36 \text{ मीटर}$$

अतः $PB = 36$ मीटर होगा।

3. चित्र से—

$\triangle ACP$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{PC}{AC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{18}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{18\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 6\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

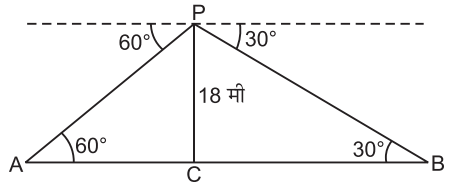
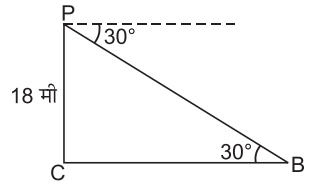
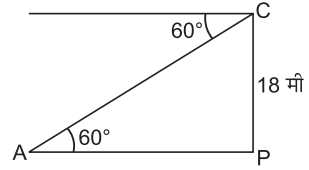
इसी प्रकार,

$\triangle PCB$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{PC}{CB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{18}{CB} \Rightarrow CB = 18\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

नदी की चौड़ाई $AB = AC + CB = 6\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ मीटर

अतः नदी की चौड़ाई $AB = 24\sqrt{3}$ मीटर होगी।



4. चित्र से—

ΔPRQ और ΔPRB में,

$$\angle QPR = \angle BPR = 30^\circ$$

$$PR = PR$$

(उभयनिष्ठ)

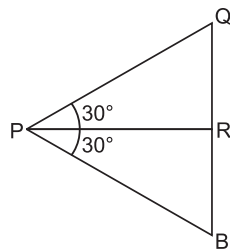
$$\angle QRP = \angle BRP = 90^\circ$$

$$\Delta PRQ \cong \Delta PRB \quad [\text{A.S.A., सर्वांगसमता नियम से}]$$

तब $QR = RB = 18$ मी

[सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग]

अतः $QB = QR + RB = 18 + 18 = 36$ मीटर होगी।



कूट आधारित प्रश्न

1. (i) 2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1. (c) 2. (a) 3. (d) 4. (b)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(iv)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iv)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न :

1. सत्य 2. सत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य 6. सत्य

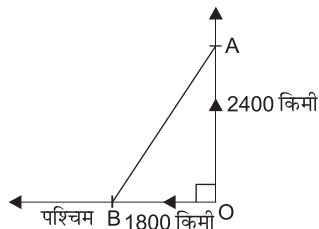
उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न (HOTS)

1. पहले हवाई जहाज A द्वारा $1\frac{1}{2}$ घंटे में उत्तर की ओर

चली गयी दूरी $= \frac{3}{2} \times 1600 = 2400$ किमी

दूसरी हवाई जहाज B द्वारा $1\frac{1}{2}$ घंटे में पश्चिम की

ओर चली गयी दूरी $= \frac{3}{2} \times 1200 = 1800$ किमी



जहाज A और B की स्थिति $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद चित्र में प्रदर्शित की गई है तथा उनके बीच

की दूरी AB है।

$\therefore$ समकोण त्रिभुज AOB में, $\angle AOB$ समकोण है।

$\therefore AB^2 = (AO)^2 + (BO)^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$$AB^2 = (2400)^2 + (1800)^2$$

$$= 5760000 + 3240000$$

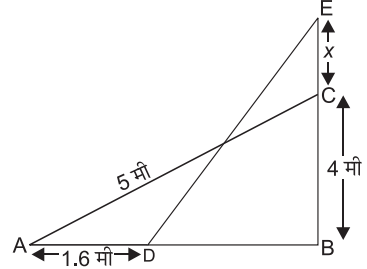
$$AB = \sqrt{9000000} = 3000$$

$$\therefore AB = 3000 \text{ किमी}$$

अतः दोनों हवाई जहाजों की $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद दूरी 3000 किमी होगी।

2. माना $AC = 5$ मीटर लम्बी सीढ़ी है,
और $BC = 4$ मीटर दीवार की ऊँचाई है, जिस
पर सीढ़ी लगाई गई है।

यदि सीढ़ी का पाद दीवार की ओर 1.6 मी०
बढ़ाया जाता है, अर्थात् $AD = 1.6$ मी
फिर सीढ़ी ऊपर की ओर खिसक जाती है, माना
'x' मीटर



समकोण $\triangle ABC$ में,

$$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$(5)^2 = (AB)^2 + (4)^2 \Rightarrow AB^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow AB = 3 \text{ मीटर}$$

$$\text{अब } DB = AB - AD = 3 - 1.6 = 1.4 \text{ मीटर}$$

$$\Rightarrow BD = 1.4 \text{ मीटर}$$

समकोण $\triangle EBD$ में,

$$ED^2 = EB^2 + BD^2 \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$(5)^2 = (EB)^2 + (1.4)^2 \Rightarrow (EB)^2 = 25 - 1.96 = 23.04$$

$$\Rightarrow EB = \sqrt{23.04} = 4.8$$

$$\text{अब, } EC = EB - BC = 4.8 - 4 = 0.8$$

अतः सीढ़ी का शीर्ष 0.8 मीटर की दूरी पर दीवार पर ऊपर की ओर खिसक जायेगा।

3. प्रश्न के अनुसार,

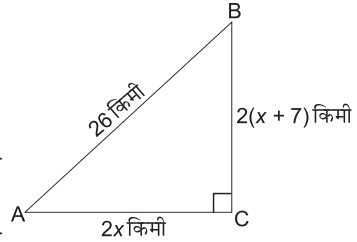
$$AC \perp CB, AC = 2x \text{ किमी,}$$

$$CB = 2(x + 7) \text{ किमी}$$

$$\text{और } AB = 26 \text{ किमी}$$

इस प्रकार, हमें C पर समकोण $\triangle ACB$ प्राप्त होता है।

अब, $\triangle ACB$ में, पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हुए,



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (26)^2 = (2x)^2 + [2(x + 7)]^2$$

$$\Rightarrow 676 = 4x^2 + 4(x^2 + 49 + 14x)$$

$$\Rightarrow 676 = 4x^2 + 4x^2 + 196 + 56x$$

$$\Rightarrow 676 = 8x^2 + 56x + 196$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 56x - 480 = 0$$

समीकरण को 8 से विभाजित करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+12) - 5(x+12) = 0 \Rightarrow (x+12)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -12 \text{ या } x = 5$$

चूँकि दूरी ऋणात्मक नहीं होती, इसलिए हम $x = -12$ की उपेक्षा करते हैं।

$$\therefore x = 5$$

अब, $BC = 2(x+7) = 2(5+7) = 24$ किमी

तथा $AC = 2x = 2 \times 5 = 10$ किमी

इस प्रकार, शहर A से शहर C के माध्यम से शहर B तक तय की गई दूरी = $AC + BC$

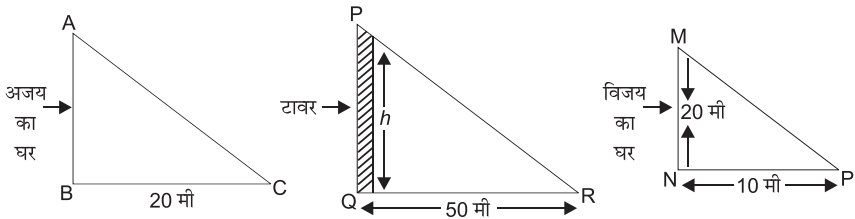
$$AC + BC = 10 + 24 = 34 \text{ किमी}$$

राजमार्ग बनने के बाद शहर A से शहर B तक तय की दूरी $BA = 26$ किमी

इसलिए, दूरी बचाई = $34 - 26 = 8$ किमी

अतः राजमार्ग बनने के बाद शहर A से B तक जाने के लिए 8 किमी कम दूरी चलनी पड़ेगी।

मूल्य आधारित प्रश्न



1. (c) ΔPQR व ΔMNP में,

$$\angle Q = \angle N = 90^\circ$$

$$\angle P = \angle M \text{ तथा } \angle R = \angle P$$

$$\Delta PQR \cong \Delta MNP$$

[A.A.A. समरूपता से]

$$\therefore \frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NP} \Rightarrow \frac{h}{20} = \frac{50}{10} \Rightarrow h = 100$$

अतः टावर की कुल ऊँचाई 100 मीटर होगी।

2. (c) जब विजय के घर की छाया $NP = 12$ मीटर होगी, तब

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NP}$$

[$\because \Delta PQR \cong \Delta MNP$]

$$\frac{100}{QR} = \frac{20}{10} \Rightarrow QR = 50 \text{ मीटर}$$

अतः टावर की छाया की लम्बाई 50 मीटर होगी।

3. (b) $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$, भी A.A.A. समरूपता से समरूप होंगे, तब,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{100}{50} \Rightarrow AB = 40 \text{ मीटर}$$

अतः अजय के घर की ऊँचाई 40 मीटर होगी।

4. (a) जब $QR = 40$ मीटर तब $BC = ?$

हम जानते हैं,

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

$$\frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR} \Rightarrow \frac{40}{100} = \frac{BC}{40} \Rightarrow BC = 16 \text{ मीटर}$$

अतः जब टावर की छाया की लम्बाई 40 मीटर होगी तब अजय के घर की छाया की लम्बाई 16 मीटर होगी।

5. (d) जब टावर की छाया $QR = 40$ मीटर, तब $NP = ?$

हम जानते हैं,

$$\triangle PQR \cong \triangle MNP$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NP} \Rightarrow \frac{100}{40} = \frac{20}{NP} \Rightarrow NP = 8 \text{ मीटर}$$

अतः जब टावर की छाया 40 मीटर लम्बी होगी तो उसी समय विजय के घर की छाया की लम्बाई 8 मीटर होगी।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (c) चित्र से—

$\triangle ABC$ एक समकोणिक त्रिभुज है, जिसमें $\angle D = 90^\circ$

इसलिए दूरी AC ज्ञात करने के लिए पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग किया जाएगा।

2. (a) $\triangle ABC$ में, $\angle D = 90^\circ$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow AC^2 = (30)^2 + (40)^2$$

$$AC^2 = 900 + 1600 = 2500$$

$$AC = 50$$

अतः AC की दूरी 50 मीटर होगी।

3. (d) इनमें से (21, 20, 22) पाइथागोरस प्रमेय का पालन नहीं करते।

4. (b) चित्र से—

$$AB = AC - BC = 50 - 12 = 38$$

अतः AB की लम्बाई 38 मीटर होगी।

5. (c) चित्र से—

प्रयुक्त रस्सी की लम्बाई = $30 + 40 + 12 = 82$

अतः रस्सी की लम्बाई 82 मीटर है।



प्रश्नावली 7 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

- बिन्दु $(1, 2)$ में भुज = 1, कोटि = 2 है तथा दोनों धनात्मक है।
अतः बिन्दु $(1, 2)$ प्रथम चतुर्थांश में है।
- बिन्दु p के निर्देशांक $(3, -9)$ हों, यहाँ भुज = 3, धनात्मक तथा कोटि = -9, ऋणात्मक है।
अतः बिन्दु $p(3, -9)$ चतुर्थ चतुर्थांश में है।
- दिया है, एक बिन्दु की कोटि शून्य है, यदि $y = 0$ है।
तब वह बिन्दु x -अक्ष पर होगा।
- बिन्दु $(-5, 7)$ की कोटि $y = 7$ है।
- y -अक्ष पर स्थित बिन्दु का भुज शून्य होगा।
- जो बिन्दु x -अक्ष पर है, उसकी कोटि शून्य होगी।
- x -अक्ष से दूरी 3 मात्रक तब $y = -3$
 y -अक्ष से दूरी 7 मात्रक तब $x = 7$
अतः इसके निर्देशांक $(7, -3)$ हैं।
- यदि कोई बिन्दु y -अक्ष पर हो तब x का निर्देशांक शून्य होगा।
- (i) $(0, 0)$ और $(3, 4)$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, y_1 = 0, x_2 = 3, y_2 = 4 \\
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 d &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \\
 d &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\
 d &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \\
 d &= 5 \text{ मात्रक}
 \end{aligned}$$

- (ii) $(0, -3)$ और $(-4, 0)$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, y_1 = -3, x_2 = -4, y_2 = 0 \\
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 d &= \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 + 3)^2} \\
 d &= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} \\
 &= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \\
 d &= 5 \text{ मात्रक}
 \end{aligned}$$

(iii) (9, 0) और (0, 9)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, x_1 = 9, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 9$$

$$d = \sqrt{(0-9)^2 + (9-0)^2}$$

$$d = \sqrt{81+81} = \sqrt{162}$$

$$d = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

(iv) (-5, 7) और (-1, 3)

$$x_1 = -5, x_2 = -1, y_1 = 7, y_2 = 3$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-1+5)^2 + (3-7)^2}$$

$$d = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16}$$

$$d = 4\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

(v) (-2, 6) और (3, -6)

$$x_1 = -2, y_1 = 6$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_2 = 3, y_2 = -6$$

$$d = \sqrt{(3+2)^2 + (-6-6)^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2}$$

$$d = \sqrt{25+144} = \sqrt{169}$$

$$d = 13 \text{ मात्रक}$$

10. मूल बिन्दु (0, 0) तथा किसी बिन्दु (x_1, y_1) के बीच की दूरी—

(i) (5, -4)

$$x_1 = 5, y_1 = -4$$

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{25+16}$$

$$d = \sqrt{41} \text{ मात्रक}$$

(ii) (-3, 4)

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$x_1 = -3, y_1 = 4$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$d = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$d = 5 \text{ मात्रक}$$

(iii) (3, 4)

$$\begin{aligned}x_1 &= 3, y_1 = 4 \\d &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\d &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\d &= \sqrt{9+16} \\d &= \sqrt{25} \\d &= 5 \text{ मात्रक}\end{aligned}$$

(iv) $(a \cos \theta, a \sin \theta)$

$$\begin{aligned}x_1 &= a \cos \theta \\y_1 &= a \sin \theta \\d &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\d &= \sqrt{(a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2} \\d &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\d &= \sqrt{a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\d &= \sqrt{a^2} [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\d &= a \text{ मात्रक}\end{aligned}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. (i) $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ और $(a \cos \beta, a \sin \beta)$

$$\begin{aligned}x_1 &= a \cos \alpha, x_2 = a \cos \beta \\y_1 &= a \sin \alpha, y_2 = a \sin \beta \\d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\d &= \sqrt{(a \cos \beta - a \cos \alpha)^2 + (a \sin \beta - a \sin \alpha)^2} \\d &= \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + a^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 \cos \beta \cdot \cos \alpha + a^2 \sin^2 \beta + a^2 \sin^2 \alpha - 2a^2 \sin \beta \cdot \sin \alpha} \\&= \sqrt{a^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin \beta + a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2a^2 \cos \beta \cdot \cos \alpha - 2a^2 \sin \beta \cdot \sin \alpha} \\&= \sqrt{a^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2a^2 (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)} \\&= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 (\cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha)} \\&= \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos (\alpha - \beta)} \\&= \sqrt{2a^2 (1 - \cos \alpha - \beta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2a^2 \left[1 - 1 + 2\sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]} \\
 &= \sqrt{2a^2 \times 2\sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \\
 &= 2a \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

(ii) $(a-b, c-d)(a+b, c+d)$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a-b, y_1 = c-d, x_2 = a+b, y_2 = c+d \\
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 d &= \sqrt{(a+b-a+b)^2 + (c+d-c+d)^2} \\
 d &= \sqrt{(2b)^2 + (2d)^2} \\
 d &= \sqrt{4b^2 + 4d^2} = \sqrt{4(b^2 + d^2)} \\
 d &= 2\sqrt{b^2 + d^2} \text{ मात्रक}
 \end{aligned}$$

2. माना $P(x, y)$ बिन्दुओं $A(7, 1)$ और

$B(3, 5)$ से समदूरस्थ है।

$$\therefore AP = BP$$

$$\Rightarrow AP^2 = BP^2$$

$$[\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$$

$$\Rightarrow (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + 49 - 14x + y^2 + 1 - 2y \\ = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 25 - 10y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 14x + 2y - 50 - 6x - 10y + 34 = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 8y - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x - y - 2 = 0$$

$$\therefore x - y = 2$$

अतः यही x और y में अभीष्ट सम्बन्ध है।

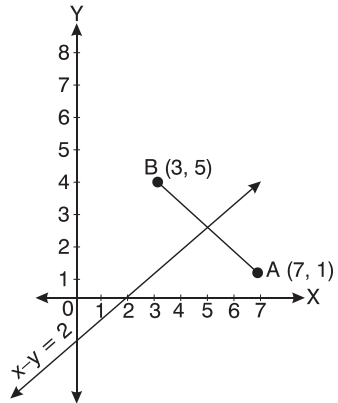
टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि समीकरण $x - y = 2$ का आलेख एक रेखा होता है। आप अपने पिछले अध्ययन से यह जानते हैं कि वह बिन्दु जो दो दिए हुए बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ होता है, रेखाखण्ड AB के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित होता है। अतः $x - y = 2$ का आलेख रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति)।

3. बिन्दुओं $(5, 3)$ और $(x, -1)$ के बीच की दूरी = 5 मात्रक

$$x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = x, y_2 = -1, d = 5$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(x-5)^2 + (-1-3)^2}$$



$$\begin{aligned}
 5 &= \sqrt{(x-5)^2 + (-4)^2} \\
 5 &= \sqrt{x^2 + 25 - 10x + 16} \\
 5 &= \sqrt{x^2 - 10x + 41} \\
 25 &= x^2 - 10x + 41 \\
 x^2 - 10x + 41 - 25 &= 0 \\
 x^2 - 10x + 16 &= 0 \\
 x^2 - 8x - 2x + 16 &= 0 \\
 x(x-8) - 2(x-8) &= 0 \\
 (x-8)(x-2) &= 0 \\
 x &= 8 \text{ या } x = 2
 \end{aligned}$$

4. दिया है, बिन्दु (8, 6) की मूलबिन्दु से दूरी, बिन्दुओं (4, 0) और (0, 3) के बीच की दूरी की दोगुनी है।

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ दो बिन्दुओं के बीच की दूरी } (d) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 \therefore \sqrt{(8-0)^2 + (6-0)^2} &= 2 \times \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} \\
 \sqrt{8^2 + 6^2} &= 2 \times \sqrt{4^2 + 9^2} \\
 \sqrt{64 + 36} &= 2 \times \sqrt{16 + 9} \\
 \sqrt{100} &= 2 \times \sqrt{25} \\
 10 &= 2 \times 5 \\
 10 &= 10
 \end{aligned}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

सिद्ध हुआ।

5. बिन्दुओं (2, y) और (-4, 3) के बीच की दूरी = 10 मात्रक

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2, y_1 = y, x_2 = -4, y_2 = 3, d = 10 \text{ मात्रक} \\
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 10 &= \sqrt{(-4-2)^2 + (3-y)^2} \\
 10 &= \sqrt{(-6)^2 + (3-y)^2} \\
 10 &= \sqrt{36 + 9 + y^2 - 6y} \\
 100 &= y^2 - 6y + 45 \\
 y^2 - 6y + 45 - 100 &= 0 \\
 y^2 - 6y - 55 &= 0 \\
 y^2 - 11y + 5y - 55 &= 0 \\
 y(y-11) + 5(y-11) &= 0 \\
 (y-11)(y+5) &= 0 \\
 y &= 11 \text{ या } y = -5
 \end{aligned}$$

6. दिया है, बिन्दु $A = (2, -2)$ $B = (14, 10)$ तथा $C = (11, 13)$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \sqrt{(14-2)^2 + (10+2)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(12)^2 + (12)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{144+144} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{288} \Rightarrow 12\sqrt{2} \text{ मात्रक} \approx 16.97 \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(11-14)^2 + (13-10)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{9+9} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{18} \Rightarrow 3\sqrt{2} \text{ मात्रक} \approx 4.24 \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } CA &= \sqrt{(2-11)^2 + (-2-13)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (-15)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{81+225} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{306} \\ \Rightarrow &= 3\sqrt{34} \text{ मात्रक} \approx 17.5 \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore 16.97 + 4.24 > 17.5$$

$\therefore$ बिन्दुओं A, B व C से एक त्रिभुज बनना सम्भव है।

$$\text{अब, } CA^2 = 306 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा } AB^2 + BC^2 = 288 + 18 \Rightarrow 306 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

सिद्ध हुआ।

अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

7. दिया है, बिन्दु $A = (6, 1)$, $B = (10, 9)$ तथा $C = (-6, 7)$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \sqrt{(10-6)^2 + (9-1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{4^2 + 8^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{16+64} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{80} \text{ मात्रक} \\ &= 4\sqrt{5} \text{ मात्रक} \approx 8.94 \text{ मात्रक} \\ BC &= \sqrt{(-6-10)^2 + (7-9)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-16)^2 + (-2)^2} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{256+4} \text{ मात्रक} \\
&= \sqrt{260} \text{ मात्रक} \\
&= 2\sqrt{65} \text{ मात्रक} \approx 16.12 \text{ मात्रक} \\
CA &= \sqrt{(6+6)^2 + (1-7)^2} \text{ मात्रक} \\
&= \sqrt{(12)^2 + (-6)^2} \text{ मात्रक} \\
&= \sqrt{144+36} \text{ मात्रक} \\
&= \sqrt{180} \text{ मात्रक} \\
&= 6\sqrt{5} \text{ मात्रक} \approx 13.42 \text{ मात्रक}
\end{aligned}$$

$$\therefore 8.94 + 13.42 > 16.12$$

$\therefore$ बिन्दुओं A, B व C से एक त्रिभुज का बनना सम्भव है।

$$\text{अब,} \quad BC^2 = 260 \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा} \quad AB^2 + CA^2 = (80+180) \Rightarrow 260 \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$BC^2 = AB^2 + CA^2$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ$$

सिद्ध हुआ।

अतः $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

8. दिया है, बिन्दु $A = (-5, 6)$, $B = (3, 0)$ तथा $C = (9, 8)$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{(3+5)^2 + (0-6)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{8^2 + (-6)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{64+36} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{100} \Rightarrow 10 \text{ मात्रक}$$

$$BC = \sqrt{(9-3)^2 + (8-0)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{36+64} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{100} \Rightarrow 10 \text{ मात्रक}$$

$$\text{तथा} \quad CA = \sqrt{(-5-9)^2 + (6-8)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2}$$

$$CA = \sqrt{196+4} \text{ मात्रक} = \sqrt{200} \text{ मात्रक}$$

$$= 10\sqrt{2} \text{ मात्रक} \approx 14.14 \text{ मात्रक}$$

$$\therefore 10+10 > 14.14$$

$\therefore$ बिन्दुओं A, B व C से एक त्रिभुज बनना सम्भव है।

$$\therefore AB = BC = 10 \text{ मात्रक}$$

∴ ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$\text{अब,} \quad CA^2 = (10\sqrt{2})^2 = 200 \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा} \quad AB^2 + BC^2 = 100 + 100 \Rightarrow 200 \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ \quad \text{तथा} \quad AB = BC$$

अतः ΔABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।

9. दिया है, किसी बिन्दु से, बिन्दुओं $A(5, 1)$, $B(-3, -7)$ तथा $C(7, -1)$ की दूरियाँ समान हैं।

माना, अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $X(x, y)$ हैं।

$$\text{तब,} \quad XA = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$$

$$XB = \sqrt{(x+3)^2 + (y+7)^2}$$

$$\text{तथा} \quad XC = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$$

$$\text{प्रश्नानुसार—} \quad XA = XB = XC$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+7)^2}$$

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + (y+7)^2$$

$$(x-5)^2 - (x+3)^2 = (y+7)^2 - (y-1)^2$$

$$x^2 + 25 - 10x - x^2 - 9 - 6x = y^2 + 49 + 14y - y^2 - 1 + 2y$$

$$16 - 16x = 16y + 48$$

$$16(1-x) = 16(y+3)$$

$$1-x = y+3$$

$$y+x+3-1=0$$

$$x+y+2=0$$

$$\dots(1)$$

$$\text{तथा} \quad \sqrt{(x+3)^2 + (y+7)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$$

$$(x+3)^2 + (y+7)^2 = (x-7)^2 + (y+1)^2$$

$$(x+3)^2 - (x-7)^2 = (y+1)^2 - (y+7)^2$$

$$x^2 + 9 + 6x - x^2 - 49 + 14x = y^2 + 1 + 2y - y^2 - 49 - 14y$$

$$20x - 40 = -12y - 48$$

$$20x + 12y = -48 + 40$$

$$20x + 12y = -8$$

$$20x + 12y + 8 = 0$$

$$4(5x + 3y + 2) = 0$$

$$5x + 3y + 2 = 0$$

$$\dots(2)$$

समीकरण (1) में (2) से गुणा करके समीकरण (2) में से घटाने पर—

$$\begin{aligned}
 5x + 3y + 2 &= 0 \\
 \underline{3x \pm 3y \pm 6 = 0} \\
 2x - 4 &= 0 \\
 2x &= 4 \\
 x &= \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर—

$$\begin{aligned}
 2 + y + 2 &= 0 \\
 y + 4 &= 0 \\
 (y &= -4)
 \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $(2, -4)$ हैं।

10. दिया है, बिन्दु $P = (2, 2)$, $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ तथा $C = (2, 3)$

सिद्ध करना है—

$$AP = BP = CP$$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore PA &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-2)^2} \text{ मात्रक} \\
 &= \sqrt{1^2 + 0^2} \text{ मात्रक}
 \end{aligned}$$

$$PA = \sqrt{1+0} \Rightarrow 1 \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}
 PB &= \sqrt{(2-2)^2 + (2-1)^2} \\
 &= \sqrt{0^2 + 1^2}
 \end{aligned}$$

$$PB = \sqrt{0+1} \Rightarrow 1 \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

तथा

$$\begin{aligned}
 PC &= \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2} \text{ मात्रक} \\
 &= \sqrt{0^2 + (-1)^2} \text{ मात्रक}
 \end{aligned}$$

$$PC = \sqrt{0+1} \Rightarrow 1 \text{ मात्रक} \quad \dots(3)$$

समीकरण (1), (2) व (3) से—

$$PA = PB = PC$$

सिद्ध हुआ।

$\therefore$ यहाँ बिन्दु P से बिन्दु A, B व C की दूरियाँ समान हैं।

अतः बिन्दु $A (1, 2)$, $B (2, 1)$ व $C (2, 3)$ बिन्दु $P (2, 2)$ केन्द्र वाले वृत्त की परिधि पर स्थित हैं।

11. बिन्दुओं $A (-3, -14)$ और $B (a, -5)$ के बीच की दूरी 9 मात्रक है।

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, x_1 = -3, y_1 = -14$$

$$9 = \sqrt{(a+3)^2 + (-5+14)^2}, x_2 = a, y_2 = -5$$

$$81 = (a+3)^2 + (9)^2, d = 9$$

$$(a+3)^2 = 0$$

$$a^2 + 9 + 6a = 0$$

$$a^2 + 6a + 9 = 0$$

$$a^2 + 3a + 3a + 9 = 0$$

$$a(a+3) + 3(a+3) = 0$$

$$(a+3)(a+3) = 0$$

$$a = -3 \text{ है।}$$

12. दिया है, किसी बिन्दु की बिन्दु $(2, -3)$ से दूरी = 10 मात्रक तथा बिन्दु का भुज = 10

तथा बिन्दु का भुज = 10

माना, बिन्दु की कोटी = y

तब, अभीष्ट बिन्दु = $(10, y)$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore \sqrt{(10-2)^2 + (y+3)^2} = 10 \text{ मात्रक}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर—

$$(8)^2 + (y+3)^2 = 10^2$$

$$64 + y^2 + 9 + 6y = 100$$

$$y^2 + 6y + 73 - 100 = 0$$

$$y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

$$y(y+9) - 3(y+9) = 0$$

$$(y+9)(y-3) = 0$$

$$\text{यदि } y+9=0, \text{ तब } y=-9$$

$$\text{यदि } y-3=0, \text{ तब } y=3$$

अतः अभीष्ट बिन्दु की कोटी -9 या 3 होगी।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएँ समान होती हैं।

शीर्ष दिये हैं—

$$(2a, 4a), (2a, 6a) \text{ और } (2a + a\sqrt{3}, 5a)$$

$$A = (2a, 4a), B = (2a, 6a) \text{ और } C = (2a + a\sqrt{3}, 5a)$$

$$x_1 = 2a, x_2 = 2a, x_3 = 2a + a\sqrt{3}$$

$$y_1 = 4a, y_2 = 6a, y_3 = 5a$$

$$AB = \sqrt{(2a-2a)^2 + (6a-4a)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2a)^2}$$

$$AB = \sqrt{4a^2} = 2a \text{ मात्रक}$$

$$BC = \sqrt{(2a + a\sqrt{3} - 2a)^2 + (5a - 6a)^2}$$

$$BC = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (-a)^2}$$

$$BC = \sqrt{a^2 3 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a \text{ मात्रक}$$

$$CA = \sqrt{(2a - 2a + a\sqrt{3})^2 + (4a - 5a)^2}$$

$$CA = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (-a)^2}$$

$$CA = \sqrt{a^2 \times 3 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a \text{ मात्रक}$$

$$AB = BC = CA$$

तीनों भुजा बराबर है, अतः यह समबाहु त्रिभुज है।

2. माना, $A = (0, -1)$, $B = (2, 1)$, $C = (0, 3)$ तथा $D = (-2, 1)$

$\therefore$ वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई समान होती है।

तथा वर्ग के प्रत्येक कोण की माप 90° होती है।

$\therefore$ सिद्ध करना है— $AB = BC = CD = DA$

तथा $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{अब, } AB &= \sqrt{(2-0)^2 + (1+1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{4+4} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2} \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(0-2)^2 + (3-1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{4+4} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore BC &= \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2} \text{ मात्रक} \\ CD &= \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{4+4} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore CD = \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2} \text{ मात्रक} \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} DA &= \sqrt{(0+2)^2 + (-1-1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{4+4} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\dots(4)$$

समीकरण (1), (2), (3) व (4) से—

$$AB = BC = CD = DA$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } AC &= \sqrt{(0-1)^2 + (3+1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{0^2 + 4^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{0+16} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{16} \Rightarrow 4 \text{ मात्रक}$$

$$\therefore AC^2 = (4)^2$$

$$AC^2 = 16 \quad \dots(5)$$

$$\text{तथा } AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = 16 \quad \dots(6)$$

समीकरण (5) व (6) से—

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

$$\text{तब, } \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$$\text{तथा } AB = BC = CD = DA$$

सिद्ध हुआ।

अतः बिन्दु $(0, -1)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ तथा $(-2, 1)$ किसी वर्ग के शीर्ष हैं।

3. दिया है, बिन्दु $A = (-4, -1)$, $B = (-2, -4)$, $C = (4, 0)$ और $D = (2, 3)$

$\therefore$ आयत की आमने-सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। तथा आयत के प्रत्येक कोण की माप समान होती है।

सिद्ध करना है, $AB = CD$, $AD = BC$

$$\text{तथा } \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } AB &= \sqrt{(-2+4)^2 + (-4+1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{4+9} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{13} \approx 3.6 \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } CD &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{4+9} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore CD = \sqrt{13} \approx 3.6 \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$AB = CD$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } BC &= \sqrt{(4+2)^2 + (0+4)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{36+16} \text{ मात्रक} = \sqrt{52} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{13} \approx 7.21 \text{ मात्रक} \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } DA &= \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-3)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{36+16} \text{ मात्रक} = \sqrt{52} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore DA = 2\sqrt{13} \approx 7.21 \text{ मात्रक} \quad \dots(4)$$

समीकरण (3) व (4) से—

$$BC = DA$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } AC &= \sqrt{(4+4)^2 + (0+1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{8^2 + 1^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{64+1} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{65} \approx 8.06 \text{ मात्रक}$$

$$\text{तथा } AC^2 = 65 \quad \dots(5)$$

$$\text{अब, } AB^2 + BC^2 = 13 + 52 \Rightarrow 65 \quad \dots(6)$$

समीकरण (5) व (6) से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

$$\text{तब, } \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$$\text{तथा } AB = CD \text{ व } AD = BC$$

सिद्ध हुआ।

अतः बिन्दु $A(-4, -1)$, $B(-2, -4)$, $C(4, 0)$ तथा $D(2, 3)$ एक आयत के शीर्ष हैं।

4. दिया है, बिन्दु (a, a) , $(-a, -a)$ तथा $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

माना, $A = (a, a)$, $B = (-a, -a)$ तथा $C = (-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

हम जानते हैं, कि— समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा समान होती है।

$$\therefore \text{ सिद्ध करना है— } AB = BC = CA$$

$$\therefore \text{ दो बिन्दुओं के बीच की दूरी } = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{(-a - a)^2 + (-a - a)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2a)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4a^2} \text{ मात्रक}$$

$$\therefore AB = \sqrt{8a^2} \Rightarrow 2\sqrt{2}a \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3} + a)^2 + (a\sqrt{3} + a)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{3a^2 + a^2 - 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2 + a^2 + 2\sqrt{3}a^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4a^2} \text{ मात्रक}$$

$$\therefore BC = \sqrt{8a^2} \Rightarrow 2\sqrt{2}a \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

$$\text{तथा } CA = \sqrt{(-a\sqrt{3} - a)^2 + (a\sqrt{3} - a)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{3a^2 + a^2 + 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2 + a^2 - 2\sqrt{3}a^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4a^2} \text{ मात्रक}$$

$$\therefore CA = \sqrt{8a^2} \Rightarrow 2\sqrt{2}a \text{ मात्रक} \quad \dots(3)$$

समीकरण (1), (2) व (3) से—

$$AB = BC = CA$$

सिद्ध हुआ।

अतः बिन्दु (a, a) , $(-a, -a)$ तथा $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

5. दिया है, बिन्दु $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right)$, $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a\right)$ तथा $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 3a\right)$

माना, $A = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right)$, $B = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a\right)$ तथा $C = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 3a\right)$

हम जानते हैं, कि—समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ समान होती हैं।

$$\therefore \text{ सिद्ध करना है— } AB = BC$$

या

$$CA = AB \text{ या } BC = AC$$

$$\therefore \text{दो बिन्दुओं के बीच की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore AB &= \sqrt{\left(\frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (2a - a)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (a)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{\frac{a^2 + 3a^2}{3}} \text{ मात्रक}\end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{\frac{4}{3} a^2} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}\text{तथा } BC &= \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{29}{\sqrt{3}}\right)^2 + (3a - 2a)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (a)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{\frac{a^2 + 3a^2}{3}} \text{ मात्रक}\end{aligned}$$

$$\therefore BC = \sqrt{\frac{4a^2}{3}} \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$AB = BC$$

सिद्ध हुआ।

अतः बिन्दु $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right)$, $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a\right)$ तथा $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 3a\right)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

प्रश्नावली 7 B

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. बिन्दुओं $(3, -7)$ और $(7, -5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड मध्य बिन्दु के निर्देशांक—

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \frac{3 + 7}{2}, \quad \frac{-7 - 5}{2} \\ \frac{10}{2}, \quad \frac{-12}{2}\end{aligned}$$

$$(5, -6)$$

2. दिया है, $(2, 3)$ तथा $(-6, 7)$ व्यास के अन्तः बिन्दुओं के निर्देशांक है तब—

$$\begin{aligned}x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -6, y_2 = 7 \\ \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{2-6}{2}, \frac{3+7}{2}$$

$$\frac{-4}{2}, \frac{10}{2}$$

$= (-2, 5)$ वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं।

3. बिन्दुओं $(5, 6)$ और $(3, 2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु के

$$\text{निर्देशांक} = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2} \right) \Rightarrow (4, 4)$$

4. $(-2, -3)$ और $(4, -1)$

$$x_1 = -2, y_1 = -3$$

$$x_2 = 4, y_2 = -1$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{-2+4}{2}, \quad \frac{-3-1}{2}$$

$$\frac{2}{2}$$

$$(1, -2)$$

5. दिया है, बिन्दुओं $P(6, b-2)$ तथा $Q(-2, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य-बिन्दु $(2, -3)$ है।

$$\therefore \left(\frac{6-2}{2}, \frac{b-2+4}{2} \right) = (2, -3)$$

$$\text{तब,} \quad \frac{b+2}{2} = -3$$

$$b+2 = -6$$

$$b = -6-2 \Rightarrow -8$$

अतः b का मान -8 है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. अन्तः विभाजित करने का सूत्र—

$$\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

बिन्दु $(6, 3)$ और $(-4, 5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का अनुपात $3 : 2$ दिया है।

$$\frac{3 \times -4 + 2 \times 6}{2+3}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 3}{2+3}$$

$$\frac{-12+12}{2+3}, \frac{15+6}{2+3}$$

$$0, \frac{21}{2+3}$$

$$\left(0, \frac{21}{5}\right)$$

2. दिया है, बिन्दु $(2, 0)$ तथा $(0, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को अन्त-विभाजन का अनुपात $= 2:3$

$$\therefore \text{ विभाजन बिन्दु के निर्देशांक } = \left(\frac{2 \times 0 + 3 \times 2}{2+3}, \frac{2 \times 4 + 3 \times 0}{2+3} \right)$$

$$= \left(\frac{0+6}{5}, \frac{8+0}{5} \right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right)$$

3. माना बिन्दु $(-3, -1)$ रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। विभाजन सूत्र से—

$$(-3, -1) = \left(\frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

यदि $(x, y) = (a, b)$ हो तो $x = a$ और $y = b$ होता है।

$$-3 = \frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \text{ और } -1 = \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \text{ है।}$$

अब $-3 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$ से प्राप्त होता है।

$$-3m_1 - 3m_2 = m_2 - m_1$$

$$-3m_1 + m_1 = m_2 + 3m_2$$

$$-2m_1 = 4m_2$$

$$m_1 : m_2 = -4 : 2$$

$$m_1 : m_2 = -2 : 1$$

अब हम देखेंगे यह अनुपात y -निर्देशांक को भी सन्तुष्ट करता है, या नहीं।

$$\text{अब, } \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{\frac{m_1}{m_2} + 3}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad (m_2 \text{ से ऊपर नीचे भाग देने पर})$$

$$\frac{\frac{-2}{1} + 3}{\frac{-2}{1} + 1} = \frac{-2+3}{-2+1} = \frac{1}{-1} = -1$$

अतः बिन्दु $A(-3, -1)$, $B(1, 3)$ और $C(-1, 1)$ संरेखी है।

4. दिया है, बिन्दु $A = (-3, 2)$ तथा $B = (3, -5)$

माना, बिन्दुओं A तथा B को X -अक्ष के द्वारा $m_1 : m_2$ में तथा Y -अक्ष द्वारा $m_3 : m_4$ में विभाजित किया जाता है।

X -अक्ष के लिए, $y = 0$

तथा Y -अक्ष के लिए, $x = 0$

$$\therefore \frac{m_1 \times (-5) + m_2 \times 2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{m_3 \times 3 + m_4 \times (-3)}{m_3 + m_4} = 0$$

$$-5m_1 + 2m_2 = 0$$

$$2m_2 = 5m_1$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore [m_1 : m_2 = 2 : 5]$$

$$3m_3 - 3m_4 = 0$$

$$3m_3 = 3m_4$$

$$m_3 = m_4$$

$$\frac{m_3}{m_4} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore [m_3 : m_4 = 1 : 1]$$

अतः x -अक्ष द्वारा अन्तः विभाजन का अनुपात $= 2 : 5$

तथा y -अक्ष द्वारा अन्तः विभाजन का अनुपात $= 1 : 1$

5. दिया है, बिन्दु P , बिन्दुओं $A(3, -5)$ तथा $B(-1, 3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को प्रकार विभाजित करता है, कि— $AB = 2 \cdot AP$

$$\therefore AB = AP + PB$$

$$2AP - AP = PB$$

$$AP = PB$$

$$\therefore AP : PB = 1 : 1$$

$$\begin{aligned} \text{तब, बिन्दु } P \text{ के निर्देशांक} &= \left[\frac{1 \times (-1) + 1 \times 3}{1+1}, \frac{1 \times 3 + 1 \times (-5)}{1+1} \right] \\ &= \left[\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2} \right] = \left[\frac{2}{2}, \frac{-2}{2} \right] \Rightarrow (1, -1) \end{aligned}$$

6. माना लीजिये रेखा $3x + y - 9 = 0$ बिन्दु $A(1, 3)$ तथा $B(2, 7)$ को जोड़ने वाली रेखाखण्ड को बिन्दु C पर $K : 1$ के अनुपात में विभाजित करती है। विभाजन सूत्र से बिन्दु C के निर्देशांक $\left(\frac{2k+1}{k+1}, \frac{7k+3}{k+1} \right)$ है।

लेकिन बिन्दु C रेखा $3x + y - 9 = 0$ पर स्थित है।

अतः बिन्दु C के निर्देशांक समीकरण $3x + y - 9 = 0$ को संतुष्ट करेंगे।

$$\text{अर्थात्} \quad 3 \left(\frac{2k+1}{k+1} \right) + \frac{7k+3}{k+1} - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 6k + 3 + 7k + 3 - 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

अतः अभीष्ट आंतरिक अनुपात $3 : 4$ है।

7. दिया है, बिन्दु $P(-3, 4)$ तथा $Q(-2, -6)$ की मिलाने वाले रेखाखण्ड पर एक बिन्दु A ऐसा है। कि $2AP = 3AQ$

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{3}{2}$$

∴

$$AP : AQ = 3 : 2$$

$$\begin{aligned} \text{तब, बिन्दु } A \text{ के निर्देशांक} &= \left[\frac{3 \times (-2) \times 2 \times (-3)}{3+2}, \frac{3 \times (-6) + 2 \times 4}{3+2} \right] \\ &= \left[\frac{-6-6}{5}, \frac{-18+8}{5} \right] \\ &= \left[\frac{-12}{5}, \frac{-10}{5} \right] = \left[\frac{-12}{5}, -2 \right] \end{aligned}$$

8. दिया है, बिन्दु P , बिन्दुओं $(-2, -2)$ तथा $(2, -4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को इस प्रकार विभाजित करता है, कि—

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AB} &= \frac{3}{7} \\ \frac{AP}{(AP+PB)} &= \frac{3}{7} & \because AB = AP + PB \end{aligned}$$

$$7AP = 3(AP + PB)$$

$$7AP = 3AP + 3PB$$

$$7AP - 3AP = 3PB$$

$$4AP = 3PB$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$$

∴

$$AP : PB = 3 : 4$$

$$\begin{aligned} \text{अब, बिन्दु } P \text{ के निर्देशांक} &= \left[\frac{3 \times 2 + 4 \times (-2)}{3+4}, \frac{3 \times (-4) + 4 \times (-2)}{3+4} \right] \\ &= \left[\frac{6-8}{7}, \frac{-12-8}{7} \right] = \left[\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7} \right] \end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.

$$D = \frac{5+3}{2}, \frac{6+8}{2}$$

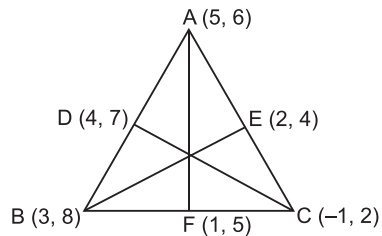
$$D = (4, 7)$$

$$E = \left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2} \right)$$

$$E = (2, 4)$$

$$F = \left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2} \right), F = (1, 5)$$

$$BE = \sqrt{(3-2)^2 + (8-4)^2} \Rightarrow \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \text{ मात्रक}$$



$$\begin{aligned}
 CD &= \sqrt{(-1-4)^2 + (2-7)^2} \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \\
 &= 5\sqrt{2} \text{ मात्रक} \\
 AF &= \sqrt{(1-5)^2 + (5-6)^2} \\
 &= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} \\
 &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \text{ इकाई}
 \end{aligned}$$

अतः त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$ तथा $5\sqrt{2}$ इकाई है।

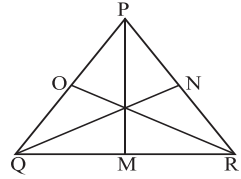
2. किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों के निर्देशांक हैं—

$(5, 1)$, $(1, 5)$ तथा $(-3, -1)$

माना, $P = (5, 1)$, $Q = (1, 5)$ तथा $R = (-3, -1)$

तथा PM , QN तथा OR त्रिभुज PQR की माधिकाएँ हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{अब, } PQ \text{ के मध्य-बिन्दु (O) के निर्देशांक} &= \left(\frac{5+1}{2}, \frac{1+5}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{6}{2}, \frac{6}{2} \right) \Rightarrow (3, 3)
 \end{aligned}$$



$$PR \text{ के मध्य-बिन्दु (N) के निर्देशांक} = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2} \right) \Rightarrow (1, 0)$$

$$\text{तथा } PQ \text{ के मध्य-बिन्दु (M) के निर्देशांक} = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2} \right) \Rightarrow (-1, 2)$$

$$\therefore \text{ दो बिन्दुओं के बीच की दूरी (d)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore \text{ माध्यिका (PM)} = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-1)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (1)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{36+1} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{37} \text{ मात्रक} \approx 6.08 \text{ मात्रक}$$

$$\text{माध्यिका (QN)} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-5)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{0^2 + (-5)^2} \text{ मात्रक}$$

$$QN = \sqrt{0+25} \text{ मात्रक}$$

$$QN = \sqrt{25} \Rightarrow 5 \text{ मात्रक}$$

$$\text{तथा माध्यिका (OR)} = \sqrt{(3+3)^2 + (3+1)^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{6^2 + 4^2} \text{ मात्रक}$$

$$= \sqrt{36+16} \text{ मात्रक} = \sqrt{52} \text{ मात्रक}$$

$$= 2\sqrt{13} \text{ मात्रक} \Rightarrow 7.21 \text{ मात्रक}$$

अतः त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ $\sqrt{37}$ मात्रक, 5 मात्रक तथा $2\sqrt{13}$ मात्रक हैं।

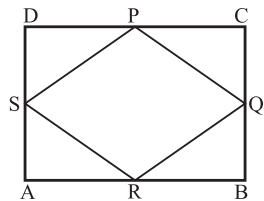
3. दिया है, किसी चतुर्भुज के शीर्षों के निर्देशांक हैं—

$(3, -2), (-3, 4), (1, 8)$ तथा $(7, 4)$

माना, $A = (3, -2), B = (-3, 4), C = (1, 8)$

तथा $D = (7, 4)$

तथा बिन्दु P, Q, R व S भुजा AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु हैं।



$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज की आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ सिद्ध करना है— $PQ = RS$ तथा, $SP = RQ$

$$\begin{aligned} \text{अब, भुजा } AB \text{ के मध्य-बिन्दु } (P) \text{ के निर्देशांक} &= \left(\frac{3-3}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) \\ &= \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2} \right) \Rightarrow (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{भुजा } BC \text{ के मध्य-बिन्दु } (Q) \text{ के निर्देशांक} &= \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+8}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2} \right) \Rightarrow (-1, 6) \end{aligned}$$

$$\text{भुजा } CD \text{ के मध्य-बिन्दु } (R) \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{8+4}{2} \right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{12}{2} \right) \Rightarrow (4, 6)$$

$$\text{तथा भुजा } AD \text{ के मध्य-बिन्दु } (S) \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{4-2}{2} \right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{2}{2} \right) \Rightarrow (5, 1)$$

$$\therefore \text{ दो बिन्दुओं के बीच की दूरी } = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore PQ &= \sqrt{(-1-0)^2 + (6-1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{1+25} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{26} \text{ मात्रक} \approx 5.1 \text{ मात्रक} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(4+1)^2 + (6-6)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (0)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{25+0} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore QR = 5 \text{ मात्रक} \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} RS &= \sqrt{(5-4)^2 + (1-6)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{1+25} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore RS = \sqrt{26} \text{ मात्रक} \approx 5.1 \text{ मात्रक} \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा, } SP &= \sqrt{(5-0)^2 + (1-1)^2} \text{ मात्रक} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (0)^2} \text{ मात्रक} = \sqrt{25+0} \text{ मात्रक} \end{aligned}$$

$$\therefore SP = 5 \text{ मात्रक} \quad \dots(4)$$

समीकरण (1), (2), (3) व (4) से—

$$PQ = RS$$

$$QR = SP$$

सिद्ध हुआ।

∴ चतुर्भुज PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः शीर्षों (3, -2), (-3, 4), (1, 8) तथा (7, 4) से बने चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रम से मिलाने पर बना चतुर्भुज समांतर होगा।

4. दिया है, $\triangle ABC$ में—

भुजा BC का मध्य-बिन्दु = D

$$\therefore BD = DC = \frac{BC}{2}$$

माना, $AP \perp BC$

अब, $\triangle ABP$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$AB^2 = AP^2 + BP^2$$

$$AB^2 = AP^2 + (BD - PD)^2 \quad \{\because BP + PD = BD\}$$

$$AB^2 = AP^2 + (DC - PD)^2 \quad \{\because BD = DC\}$$

$$AB^2 = AP^2 + DC^2 + PD^2 - 2 \cdot DC \cdot PD \quad \dots(1)$$

अब, $\triangle APC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$AC^2 = AP^2 + PC^2$$

$$AC^2 = AP^2 + (PD + DC)^2 \quad \{\because PC = PD + DC\}$$

$$AC^2 = AP^2 + PD^2 + DC^2 + 2 \cdot PD \cdot DC \quad \dots(2)$$

अब, $\triangle APD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$AD^2 = AP^2 + PD^2 \quad \dots(3)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर—

$$AB^2 + AC^2 = AP^2 + DC^2 + PD^2 - 2 \cdot DC \cdot PD + AP^2 + PD^2 + DC^2 + 2 \cdot PD \cdot DC$$

$$AB^2 + AC^2 = AP^2 + DC^2 + PD^2 + AP^2 + PD^2 + DC^2$$

$$= 2 \cdot AP^2 + 2 \cdot DC^2 + 2 \cdot PD^2$$

$$= 2(AP^2 + PD^2 + DC^2)$$

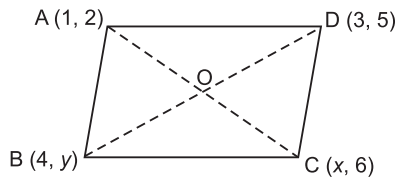
$$= 2 \cdot (AD^2 + DC^2) \quad \{\because AP^2 + PD^2 = AD^2\}$$

$$\text{अतः } [AB^2 + AC^2 = 2 \cdot (AD^2 + DC^2)]$$

सिद्ध हुआ।

5. दिया है, समांतर चतुर्भुज के शीर्ष (1, 2), (4, y), (x, 6) तथा (3, 5) दो बिन्दुओं के मध्य-बिन्दुओं के निर्देशांक—

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$$



∴ AC के मध्य बिन्दु O के निर्देशांक = BD के मध्य बिन्दु O के निर्देशांक

$$\frac{1+x}{2}, \frac{6+2}{2} = \frac{3+4}{2}, \frac{y+5}{2}$$

$$\frac{1+x}{2} = \frac{3+4}{7-1^2}$$

$$x = 6$$

तथा $\frac{y+5}{2} = \frac{6+2}{2}$

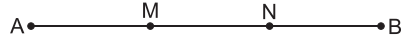
$$y = 8-5$$

$$y = 3$$

अतः x व y का मान 6 तथा 3 है।

6. माना रेखाखण्ड AB के शीर्ष A (5, -7) तथा B (8, -1) है। रेखाखण्ड AB पर बिन्दु M तथा N, AB को तीन समान भागों में विभाजित करते हैं।

∴ $AM = MN = NB = \frac{AB}{3}$



इस प्रकार, बिन्दु M तथा N रेखाखण्ड AB को क्रमशः (1, 2) तथा (2 : 1) के अनुपात में विभाजित करते हैं।

अब, बिन्दु M के निर्देशांक—

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1 \times 8 + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times -1 + 2 \times -7}{1+2} \right) \\ &= \left(\frac{8+10}{3}, \frac{-1-14}{3} \right) = \left(\frac{18}{3}, \frac{-15}{3} \right) = (6, -5) \end{aligned}$$

अब, बिन्दु N के निर्देशांक—

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2 \times 8 + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times -1 + 1 \times -7}{2+1} \right) \\ &= \left(\frac{16+5}{3}, \frac{-2-7}{3} \right) \\ &= \left(\frac{21}{3}, \frac{-9}{3} \right) = (7, -3). \end{aligned}$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (c) 2. (b) 3. (b) 4. (c) 5. (b) 6. (c) 7. (d) 8. (d)
9. (a) 10. (c)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (a) 2. (d) 3. (b) 4. (c)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से,

$$(BL)^2 = (OB)^2 + (OL)^2$$

$$(BL)^2 = (5)^2 + (3)^2 \Rightarrow (BL)^2 = 25 + 9$$

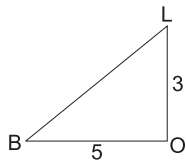
$$(BL)^2 = 34 \Rightarrow BL = \sqrt{34} \text{ इकाई}$$

अथवा $BL = \sqrt{34} = 5.83$ इकाई

दिया है—1 इकाई = 150 किमी

तब $BL = 5.83 \times 150 = 874.6 \approx 875$ किमी

अतः लखनऊ व भुज के बीच की दूरी 875 किमी है।



2. चित्र से—

यहाँ $x_1 = 0, y_1 = 7$

तथा $x_2 = 5, y_2 = 10$

$$m_1 : m_2 = 3 : 2$$

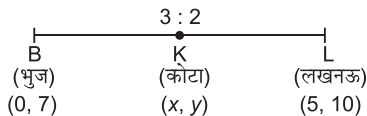
विभाजन सूत्र से,

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3 + 2} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{तथा } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{3 \times 10 + 2 \times 7}{3 + 2}$$

$$y = \frac{30 + 14}{5} = \frac{44}{5}$$

अतः कोटा k के निर्देशांक $= (x, y) = \left(3, \frac{44}{5}\right)$



3. चित्र से—

L के निर्देशांक $= (5, 10)$

N के निर्देशांक $= (2, 6)$

तथा P के निर्देशांक $= (8, 6)$

$$\text{तब } LN = \sqrt{(2-5)^2 + (6-10)^2}$$

$$[\because \text{दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ इकाई}$$

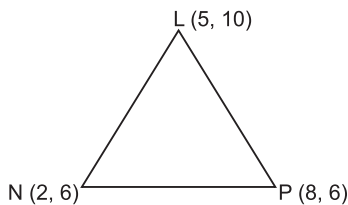
$$NP = \sqrt{(8-2)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ इकाई}$$

$$\text{तथा } CP = \sqrt{(8-5)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$LP = 5 \text{ इकाई}$$

अब $\triangle LNP$ में, $LN = LP = 5$ इकाई

अतः लखनऊ (L), नासिक (N) और पुरी (P) स्थानों द्वारा निर्मित त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



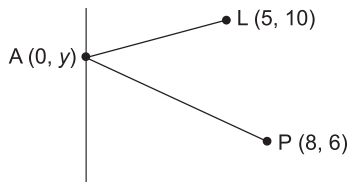
4. माना y -अक्ष पर बिन्दु $A(0, y)$ है, जो लखनऊ (L) और पुरी (P) बिन्दुओं से समान दूरी पर है।

चित्र से—

L के निर्देशांक = (5, 10)

तथा P के निर्देशांक = (8, 10)

A के निर्देशांक = (0, y)



तब $AL = AP$

$$\sqrt{(5-0)^2 + (10-y)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (6-y)^2}$$

$$\sqrt{25 + (10-y)^2} = \sqrt{64 + (6-y)^2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$25 + (10-y)^2 = 64 + (6-y)^2$$

$$25 + 100 + y^2 - 20y = 64 + 36 + y^2 - 12y$$

$$125 - 100 = 20y - 12y$$

$$25 = 8y$$

$$\Rightarrow y = \frac{25}{8}$$

तब $A = \left(0, \frac{25}{8}\right)$

अतः लखनऊ (L), और पुरी (P) बिन्दुओं से समान दूरी पर y -अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $\left(0, \frac{25}{8}\right)$ है।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iii) 2. (iv)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (a) 2. (a) 3. (b) 4. (c)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(i)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न (HOTS)

1. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल, दो त्रिभुजों, $\triangle ABD$ व $\triangle BCD$ से मिलाकर बना है।

यहाँ $BD = 7$ इकाई

$AM = 5$ इकाई

तथा $CN = 3$ इकाई

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= \triangle ABD$ का क्षेत्रफल $+ \triangle BCD$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AN + \frac{1}{2} \times BD \times CN$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 5 + \frac{1}{2} \times 7 \times 3$$

$$= \frac{1}{2} (35 + 21) = \frac{1}{2} \times 56 = 28 \text{ वर्ग इकाई}$$

अतः दिये गये चतुर्भुज का क्षेत्रफल 28 वर्ग इकाई है।

2. माना बिन्दु $(-4, 6)$, दिये गये रेखाखण्ड को $M_1 : M_2$ के अनुपात में विभाजित करता है एवं रेखाखण्ड के सिरों के निर्देशांक $A(-6, 10)$ तथा $B(3, -8)$ है।

$$\therefore x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} - 4 = \frac{3m_1 + (-6m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$-7m_1 = -2m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

अतः बिन्दु $(-4, 6)$ दिये बिन्दुओं से बने रेखाखण्ड को $2 : 7$ में विभाजित करता है।

3. माना वृत्त का केन्द्र $O(x, y)$ है, जिसकी दूरी वृत्त पर स्थित तीनों बिन्दुओं $A(6, -6)$, $B(3, -7)$ तथा $C(3, 3)$ से समान है।

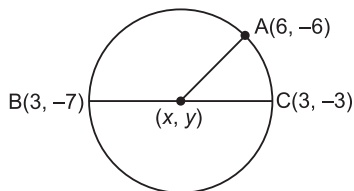
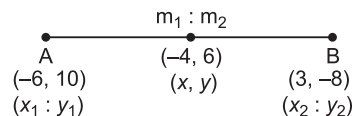
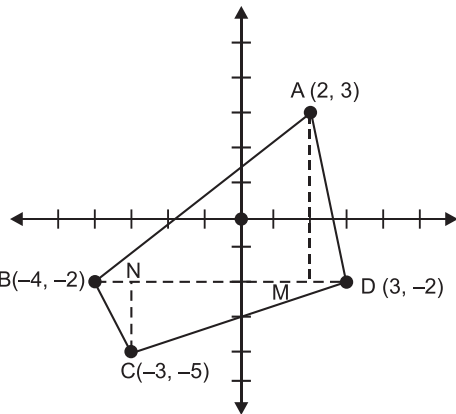
अर्थात् $OA = OB = OC$

तब $OA = \sqrt{(x-6)^2 + (y+6)^2}$

$$[\because \text{दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$$

$$OB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+7)^2}$$

$$OC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$



प्रश्नानुसार, $OA = OB = OC$

$$\therefore OA = OB$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y+6)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+7)^2}$$

$$(x-6)^2 + (y+6)^2 = (x-3)^2 + (y+7)^2 \quad [\because \text{दोनों ओर वर्ग करने पर}]$$

$$x^2 + 36 - 12x + y^2 + 36 + 12y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 49 + 14y$$

$$\Rightarrow 72 - 12x + 12y = 58 - 6x + 14y$$

$$\Rightarrow 12x - 6x + 14y - 12y - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 2y = 14 \Rightarrow 3x + y = 7$$

$$3x + y - 7 = 0$$

...(1)

तथा

$$OB = OC$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+7)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \quad [\because \text{दोनों ओर वर्ग करने पर}]$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 49 + 14y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 9 - 6y$$

$$58 - 6x + 4y = 18 - 6x - 6y$$

$$\Rightarrow 58 - 18 + 14y + 6y = 0 \Rightarrow 40 + 20y = 0$$

$$\Rightarrow 20y = -40 \Rightarrow y = -2$$

$$y = -2$$

यह $y = -2$, समीकरण (1) में रखने पर,

$$\text{अब, } 3x - 2 = 7 \Rightarrow 3x = 9$$

$$x = 3$$

अतः दिये गये वृत्त का केन्द्र $(3, -2)$ होगा।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) चित्र से—

बिन्दु H के निर्देशांक के लिए 2 इकाई x -अक्ष पर तथा 4 इकाई y -अक्ष पर चलने से प्राप्त होंगे।

अतः H के निर्देशांक $(2, 4)$ हैं।

2. (b) y -अक्ष से बिन्दु G तक जाने के लिए 9 इकाई x -अक्ष के समान्तर चलना होगा।

अतः y -अक्ष से बिन्दु G की दूरी 9 इकाई है।

3. (b) बिन्दु H से G तक जाने के लिए 7 इकाई x -अक्ष के समान्तर चलना होगा।

अतः भुजा HG की लम्बाई 7 इकाई है।

4. (c) x , बिन्दु F का भुज है, (तब) बिन्दु $p(0, 0)$ से x -अक्ष की दिशा में 3 इकाई चलना होगा।

अतः x का मान 9 इकाई है।

5. (d) चित्र से—

बिन्दु F के निर्देशांक $= (9, 8)$

तथा बिन्दु D के निर्देशांक $= (4, 2)$

$$\text{तब } FD = \sqrt{(4-9)^2 + (2-8)^2} \quad [\because \text{दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$$

$$FD = \sqrt{(-5) + (-6)^2}$$

$$FD = \sqrt{25+36}$$

$$FD = \sqrt{61} \text{ इकाई}$$

अतः FD की लम्बाई $\sqrt{61}$ इकाई है।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (a) चित्र से—

बिन्दु H के निर्देशांक $= (1, 5)$

तथा बिन्दु G के निर्देशांक $= (5, 1)$

2. (d) चित्र से—

बिन्दु A के निर्देशांक $= (1, 9)$

तथा बिन्दु B के निर्देशांक $= (5, 13)$

$$\text{तब } AB = \sqrt{(5-1)^2 + (13-9)^2} \quad [\because \text{दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \text{ इकाई}$$

अतः A व B के बीच की दूरी $\sqrt{32}$ इकाई है।

3. (d) चित्र से—

बिन्दु M के निर्देशांक $= (5, 11)$

बिन्दु Q के निर्देशांक $= (9, 3)$

माना M व Q को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु $O(x, y)$ है। तब,

$$x = \frac{5+9}{2}, y = \frac{11+3}{2}$$

$$x = \frac{14}{2}, y = \frac{14}{2}$$

$$x = 7, y = 7$$

अतः मध्य बिन्दु के निर्देशांक $O(7, 7)$ होंगे।

4. (b) चित्र से—

बिन्दु ' T ' व ' O ' को जोड़ने वाला रेखाखण्ड x -अक्ष के समान्तर है, इसलिए बिन्दु T व बिन्दु ' O ' की कोटी समान है।

5. (c) चित्र से—

यदि G को मूल बिन्दु बना दिया जाए तो $(4, 2)$ बिन्दु Q के निर्देशांक होंगे।



प्रश्नावली 8 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1.

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(3)^2 = (BC)^2 + (2)^2$$

$$9 - 4 = BC^2$$

$$BC = \sqrt{5}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

2.

$$\sin A = \frac{3}{5} \text{ दिया है।}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos A = \frac{4}{5}$$

$$(5)^2 = (3)^2 + (AC)^2$$

$$25 - 9 = (AC)^2$$

$$(AC)^2 = 16$$

$$AC = 4$$

3.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

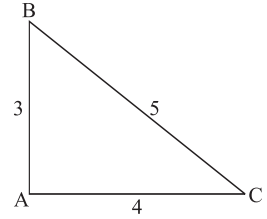
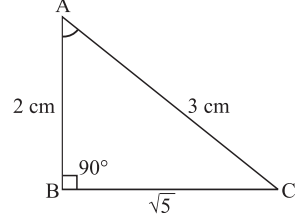
$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (a)^2 + (b)^2$$

$$b^2 + a^2 = (\text{कर्ण})^2$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{b^2 + a^2}$$



$$\sec \theta = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$$

4. दिया है, चित्र में—

$$\tan B = \frac{3}{4} \quad \text{तथा} \quad BC = 8 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \tan B = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AC}{8 \text{ सेमी}} = \frac{3}{4} \quad \{\because BC = 8 \text{ सेमी}\}$$

$$AC = \frac{3}{4} \times \text{सेमी} \Rightarrow 6 \text{ सेमी}$$

पाइथागोरस प्रमेय से—कर्ण² = लम्ब² + आधार²

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (6 \text{ सेमी})^2 + (8 \text{ सेमी})^2$$

$$= 36 \text{ सेमी}^2 + 64 \text{ सेमी}^2$$

$$= 100 \text{ सेमी}^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{100} \text{ सेमी}$$

$$\text{अतः} \quad [AB = 10 \text{ सेमी}]$$

5. दिया है, समकोण $\triangle PQR$ में—

$$\sin Q = \frac{3}{8} \text{ तथा कर्ण } QR = 24 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \sin Q = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{RP}{QR}$$

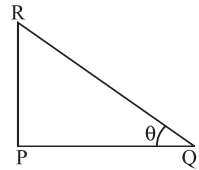
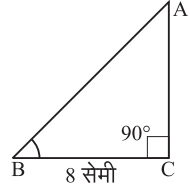
$$\therefore \frac{RP}{QR} = \frac{3}{8}$$

$$RP = \frac{3}{8} \times QR$$

$$RP = \frac{3}{8} \times 24 \text{ सेमी} \quad \{\because QR = 24 \text{ सेमी}\}$$

$$\therefore RP = 9 \text{ सेमी}$$

अतः PR का मान 9 सेमी है।



लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, $\cos \theta = \frac{2}{3}$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{3}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

$$\tan^2 \theta = \frac{9}{4} - 1$$

$$\tan^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{तब } 2\sec^2 \theta + 2\tan^2 \theta - 9 &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{4}\right) - 9 \\ &= 2 \times \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 9 = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} - 9 = \frac{14}{2} - 9 = 7 - 9 = -2 \end{aligned}$$

2. $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान—

$$\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}, \sin A = \frac{3}{4} \text{ (दिया है)}$$

$$(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 - (\text{लम्ब})^2 = (\text{आधार})^2$$

$$(\text{आधार})^2 = (4)^2 - (3)^2$$

$$(\text{आधार})^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\text{आधार} = \sqrt{7}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

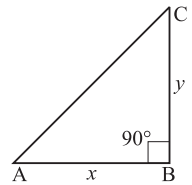
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

3. दिया है, $\cot A = \frac{x}{y}$

$$\Delta ABC \text{ में, } \cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$$

पाइथागोरस प्रमेय से— $\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ &= y^2 + x^2 \end{aligned}$$



$$\therefore AC = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{अतः} \quad \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{तथा} \quad \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. दिया है, $\cos \theta = \frac{7}{25}$

$$\Delta ABC \text{ में, } \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{7}{25}$$

पाइथागोरस प्रमेय से— $\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$(25)^2 = BC^2 + (7)^2$$

$$625 = BC^2 + 49$$

$$625 - 49 = BC^2$$

$$576 = BC^2$$

$$\therefore BC = \sqrt{576} \Rightarrow 24$$

$$\text{तब,} \quad \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{24}{25}$$

$$\text{सिद्ध करना है—} \quad \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = 7$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{24}{25}}{1 - \frac{24}{25}}} = \sqrt{\frac{\frac{25 + 24}{25}}{\frac{25 - 24}{25}}} = \sqrt{\frac{49}{1}}$$

$$= \frac{7}{1} = 7 \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}$$

सिद्ध हुआ।

5. $\tan \theta = \frac{4}{3}$

$$\text{हम जानते हैं, } \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{4}{3} \text{ (दिया है)}$$

$$\text{लम्ब} = 4, \text{ आधार} = 3$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = (4)^2 + (3)^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = 16 + 9$$

$$\text{कर्ण}^2 = 25$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{25}$$

$$\text{कर्ण} = 5$$

$$\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{4+3}{4-3} = 7$$

अतः $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ का मान 7 है।

6. माना दो समकोण त्रिभुज CAD और EBF हैं, जहाँ $\cos A = \cos B$

यहाँ,

$$\cos A = \frac{AD}{AC}$$

और

$$\cos B = \frac{BF}{BE}$$

तब

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BF}{BE}$$

अतः

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BF}{BE} = K \text{ (मान लीजिए)} \quad \dots(i)$$

अब, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} \text{ और } BE^2 = BF^2 + EF^2$$

$$EF = \sqrt{BE^2 - BF^2}$$

अतः

$$\frac{CD}{EF} = \sqrt{\frac{AC^2 - AD^2}{BE^2 - BF^2}}$$

$$\frac{CD}{EF} = \sqrt{\frac{1}{K^2} (BE^2 - BF^2)} = \frac{1}{K} \quad \dots(ii)$$

समी० (i) और (ii) से हमें यह प्राप्त होता है।

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BF}{BE} = \frac{EF}{CD}$$

तब प्रमेय का प्रयोग करने पर $\triangle CAD$ और $\triangle EBF$ प्राप्त होता है।

अतः $\angle A = \angle B$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 13^2 - 5^2$$

$$AC = \sqrt{169 - 25}$$

$$AC = \sqrt{144}$$

$$AC = 12 \text{ (लम्ब)}$$

$$\sin B = \frac{12}{13} \left(\because \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \right)$$

$$\cos C = \frac{12}{13} \left(\because \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \right)$$

$$\tan B = \frac{12}{5} \left(\because \tan B = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \right)$$

2.

$$\tan A = \frac{3}{4} \left(\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{लम्ब} = 3, \text{ आधार} = 4$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin A = \frac{3}{5} \left(\because \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \right) \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$$

प्रश्नानुसार,

$$\sin A \cdot \cos A = \frac{12}{25}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin A \cdot \cos A$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$$

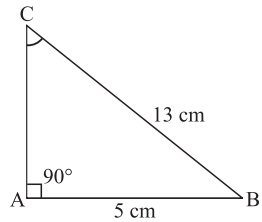
$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

3.

$$\frac{\sec^2 \theta - \sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sec^2 \theta - \sin^2 \theta}{\tan^2 \theta}$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{1 - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}}$$



$$\frac{1 - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

(इति सिद्धम्)

4. $\tan A = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ दिया है।

हम जानते हैं कि $\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$$\text{लम्ब} = 2xy, \text{ आधार} = x^2 - y^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{4x^2 y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2 y^2}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2 y^2}$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{कर्ण} = x^2 + y^2$$

$$\sin A = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \left(\because \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \right)$$

$$\cos A = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(\because \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \right)$$

5. दिया है, $\tan \theta = \frac{4}{3}$

$$\text{तब, } \frac{3 \cdot \sin \theta - 2 \cdot \cos \theta}{3 \cdot \sin \theta + 2 \cdot \cos \theta} = \frac{\cos \theta \left(3 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 2 \times 1 \right)}{\cos \theta \left(3 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 2 \times 1 \right)}$$

$$= \frac{3 \tan \theta - 2}{3 \tan \theta + 2}$$

$$= \frac{3 \times \left(\frac{4}{3} \right) - 2}{3 \times \left(\frac{4}{3} \right) + 2}$$

$$= \frac{4 - 2}{4 + 2} = \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \because \tan \theta = \frac{4}{3} \right\}$$

अतः $\frac{3 \sin \theta - 2 \cos \theta}{3 \sin \theta + 2 \cos \theta} = \frac{1}{3}$

6. दिया है, $\cot A = \frac{4}{3}$

$$\Delta ABC \text{ में—} \quad \cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{4}{3}$$

पाइथोगोरस प्रमेय से—

$$\begin{aligned} \text{कर्ण}^2 &= \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2 \\ AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ &= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 \end{aligned}$$

$$AC^2 = 25$$

$$\therefore AC = \sqrt{25} \Rightarrow 5$$

$$\text{तब,} \quad \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5}$$

$$\text{तथा} \quad \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{अब,} \quad \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \\ &= \frac{9+16}{25} \Rightarrow \frac{25}{25} \Rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad [\sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

सिद्ध हुआ।

7. दिया है, $\tan \theta = \frac{a}{b}$

$$\text{तब,} \quad \frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{\cos \theta \left(a \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + b \cdot 1 \right)}{\cos \theta \left(a \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - b \cdot 1 \right)} = \frac{a \tan \theta + b}{a \tan \theta - b}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + b}{a \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - b} \end{aligned}$$

$$\left\{ \because \tan \theta = \frac{a}{b} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{a^2}{b} + b}{\frac{a^2}{b} - b} \Rightarrow \frac{\frac{a^2 + b^2}{b}}{\frac{a^2 - b^2}{b}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{b} \times \frac{b}{a^2 - b^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\text{अतः} \quad \left[\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right]$$

सिद्ध हुआ।

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. $\tan 30^\circ \sec 45^\circ + \tan 60^\circ \sec 30^\circ$

हम जानते हैं, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2.

$$3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 60^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ \frac{3}{2} - 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1 - \sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \cos 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\cos 4\theta = \cos 4 \times 60^\circ$$

$$= \cos 240^\circ$$

$$= \cos (270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

4.

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = ?$$

$$\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{कर्ण}^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2 - (\text{लम्ब})^2$$

$$\text{आधार} = \sqrt{4 - 3}$$

$$\text{आधार} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

5. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः 45° पर मान बराबर होते हैं।

6. $\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

7. $\frac{1 - 2 \tan^2 45^\circ}{1 + 2 \tan^2 45^\circ}$

$$\frac{1 - 2 \times (1)^2}{1 + 2 \times (1)^2} = \frac{1 - 2}{1 + 2} = \frac{-1}{3}$$

8. दिया है, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

तब $\cos 0^\circ = 1$ तथा $\cos 90^\circ = 0$

अतः $\cos \theta$ के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः 1 तथा 0 हैं।

9. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \sin 60^\circ$

$$\frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 3}{\sqrt{3} \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L.H.S. = R.H.S.

लघु उत्तरीय प्रश्न

1.
$$\frac{5 \sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 4 \tan^2 30^\circ}{2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ + \tan^2 45^\circ}$$

$$= \frac{5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{5 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \frac{15+6-16}{12} = \frac{2(21-16)}{12(\sqrt{3}+2)} = \frac{2 \times 5}{12(\sqrt{3}+2)} = \frac{5}{6(\sqrt{3}+2)}$$

2.
$$\sin(A+B) = 1$$

$$\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = 1 \quad \dots(i)$$

$$\sin(A-B) = \frac{1}{2}$$

$$\sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \quad \dots(ii)$$

दोनों को जोड़ने पर—

$$2 \sin A \cdot \cos B = 1 + \frac{1}{2}$$

$$2 \sin A \cdot \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{3}{2 \times 2}$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A = \sin 60^\circ, \cos B = \cos 30^\circ$$

$$A = 60^\circ, B = 30^\circ$$

3. $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$
 $A = 30^\circ$ को रखने पर—

$$\sin 2 \times 30^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2 \times 3}{4 \times \sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

4. $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$
 $\theta = 30^\circ$ रखने पर—

$$\cos 2 \times 30^\circ = \frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

इति सिद्धम्

5. दिया है, $\theta = 45^\circ$

सिद्ध करना है—

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \tan 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$$

$\{\because \theta = 45^\circ\}$

$$= \frac{2 \times 1}{1 + (1)^2} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} \Rightarrow 1$$

तथा, दायाँ पक्ष $\Rightarrow \sin 2\theta = \sin (2 \times 45^\circ)$ $\{\therefore \theta = 45^\circ\}$

$$= \frac{2 \times 1}{1 + (1)^2} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} \Rightarrow 1$$

तथा, दायाँ पक्ष $\Rightarrow \sin 2\theta = \sin (2 \times 45^\circ)$ $\{\therefore \theta = 45^\circ\}$

$$= \sin 90^\circ \Rightarrow 1$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः $\left[\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta \right]$

सिद्ध हुआ।

6. दिया है, $\theta = 30^\circ$

सिद्ध करना है- $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

बायाँ पक्ष $\Rightarrow \cos 3\theta = \cos (3 \times 30^\circ)$ $\{\therefore \theta = 30^\circ\}$

$$= \cos 90^\circ \Rightarrow 0$$

तथा दायाँ पक्ष $\Rightarrow 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ $\{\therefore \theta = 30^\circ\}$

$$= 4 \cdot \cos^3 30^\circ - 3 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3 \times \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः $[\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta]$

सिद्ध हुआ।

7. $\operatorname{cosec} A = \sqrt{2} = \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{2}, \text{ लम्ब} = 1 \quad \text{कर्ण}^2 = \sqrt{(\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2}$$

$$(\text{आधार})^2 = (\sqrt{2})^2 - (1)^2$$

$$\sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$= \sqrt{2-1} \quad \text{आधार} = 1$$

$$\sec A = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\begin{aligned}
 \sec A &= \sqrt{2}, \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2\sin^2 A + 3\cot^2 A}{9(\tan^2 A - \cos^2 A)} \\
 &= \frac{2\sin^2 A + 3\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{9\left(\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \cos^2 A\right)} = \frac{2\sin^4 A + 3\cos^2 A}{9\left(\frac{\sin^2 A - \cos^4 A}{\cos^2 A}\right)} \\
 &= \frac{2\left(\frac{1}{r^2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{9\left(\frac{\left(\frac{1}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{\left(\frac{1}{r^2}\right)^2}\right)} = \frac{2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

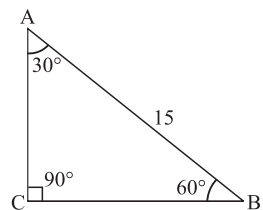
$$\angle A + \angle 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{BA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{15}$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad AC &= \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ इकाई} \\
 BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\
 BC^2 &= \frac{225 - 225 \times 3}{4} \\
 BC^2 &= \frac{900 - 675}{4} \\
 BC^2 &= \frac{225}{4} \\
 BC &= \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} \\
 BC &= 7.5 \text{ इकाई}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (\sqrt{3}+1)(3-\cot 30^\circ) = \tan^3 60^\circ - 2\sin 60^\circ$$

$$(\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

इति सिद्धम्

$$3. \text{ सिद्ध करना है— } 4\cot^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ बायाँ पक्ष } = 4\cot^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$$

$$= 4 \times (1)^2 - (2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \times 1 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$= 4 - 4 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

$$\therefore \text{ बायाँ पक्ष } = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\text{अतः } \left[4\cot^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} \right]$$

सिद्ध हुआ।

$$4. \text{ सिद्ध करना है— } \left(\frac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ} \right)^2 = \frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{बायाँ पक्ष } \Rightarrow \left(\frac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ} \right)^2 &= \left[\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} \right]^2 = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right]^2
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \because \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1}{(\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1} \\
&= \frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{3 + 1 - 2\sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2(2 - \sqrt{3})} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\
\text{तथा दायँ पक्ष} \Rightarrow \frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायँ पक्ष

$$\text{अतः} \left[\left(\frac{1 + \cot 60^\circ}{1 - \cot 60^\circ} \right)^2 = \frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} \right]$$

सिद्ध हुआ।

5. सिद्ध करना है—

$$2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ) = 6$$

$$\text{बायाँ पक्ष} \Rightarrow 2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + (\sqrt{3})^2 \right] - 6 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = 2 \left[\frac{1}{2} + 3 \right] - 6 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \\
&= 2 \left[\frac{1+6}{2} \right] - 6 \left[\frac{3-2}{6} \right] \\
&= 2 \times \frac{7}{2} - 6 \times \frac{1}{6} = 7 - 1 = 6 \text{ दायँ पक्ष}
\end{aligned}$$

$$\text{अतः} [2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)] = 6$$

सिद्ध हुआ।

6. सिद्ध करना है— $\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \sin 30^\circ + \cos 60^\circ} = \sin 60^\circ$

$$\begin{aligned}
\text{बायाँ पक्ष} \Rightarrow \frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \sin 30^\circ + \cos 60^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \right)}{\left(\frac{2+1+1}{2} \right)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{तथा दायँ पक्ष} \Rightarrow \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{बायँ पक्ष} = \text{दायँ पक्ष}$$

$$\text{अतः} \left[\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \sin 30^\circ + \cos 60^\circ} = \sin 60^\circ \right]$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्नावली 8 c

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

$$1. \quad \tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \dots(i)$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$\sec^2 A = \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}$$

$$\sec A = \sqrt{\frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}}$$

$$\sec A = \frac{\cot^2 A + 1}{\cot A} \quad \dots(ii)$$

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} \quad \dots(iii)$$

$$2. \quad 8 \tan A = 15, \frac{1}{\cot A} = 15, \cot A = \frac{8}{15}$$

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{64}{225}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{225 + 64}{225}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{289}{225}}} = \frac{1}{\frac{17}{15}} = \frac{15}{17}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \\
 \text{L.H.S.} &= \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \\
 \frac{1^2 - \sin^2 \theta}{\cos \theta (1 - \sin \theta)} &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta} \\
 \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta} &= \frac{\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{1}{\sec A - \tan A} &= \sec A + \tan A \\
 \text{L.H.S.} &= \frac{1}{\sec A - \tan A} \\
 &= \frac{\sec A + \tan A}{\sec^2 A - \tan^2 A} = \sec A + \tan A \quad (\text{इति सिद्धम्}) \\
 &(\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1 \text{ सर्वासमिका से})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \cos A &= \frac{1}{\sec A} \\
 \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A} \\
 \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}{\frac{1}{\sec A}} = \sqrt{\sec^2 A - 1} \\
 \cot A &= \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} \\
 \operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}
 \end{aligned}$$

$$6. \cot^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = 1$$

$$\text{L.H.S.} = \cot^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta [\because \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1]$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - 1 - \operatorname{cosec}^2 \theta = -1$$

(इति सिद्धम्)

7. $\cos A \times \tan A \operatorname{cosec} A = 1$

L.H.S. = $\cos A \times \tan A \operatorname{cosec} A$

$$\cos A \times \frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{1}{\sin A} = 1$$

इति सिद्धम्

8. $(1 - \cos^2 A) \operatorname{cosec}^2 A = 1$

L.H.S. = $(1 - \cos^2 A) \operatorname{cosec}^2 A$

$\sin^2 A \times \operatorname{cosec}^2 A$

$$\sin^2 A \times \frac{1}{\sin^2 A} = 1$$

(इति सिद्धम्)

9. $(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)(1 + \cot^2 \theta) = 1$

L.H.S. = $(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)(1 + \cot^2 \theta)$

$(1 - \cos^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)$

$\sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta)$

$\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \times \cot^2 \theta$

$$\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(इति सिद्धम्)

10. $(\sec^2 \theta - 1) \cot^2 \theta$

$\therefore \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

तब $\tan^2 \theta \times \cot^2 \theta = 1$

11. (a) $(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta - 1) = 1$

L.H.S. = $(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta - 1)$

$\cot^2 \theta \times \tan^2 \theta = 1$

इति सिद्धम्

(b) $(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) \tan^2 \theta = 1$

L.H.S. = $\cot^2 \theta \times \tan^2 \theta = 1$

इति सिद्धम्

12. $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta - 2$

L.H.S. = $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta^2 - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta} = \frac{1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} - \frac{2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}$$

$= \sec^2 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta - 2$

(इति सिद्धम्)

13. $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, तब $\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$
 $\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \quad (\text{लम्ब})^2 = (\text{कर्ण})^2 - (\text{आधार})^2$
 $\text{लम्ब} = \sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $\sin A = \frac{1}{2} \quad \text{लम्ब} = \sqrt{4-3}, \text{ लम्ब} = 1$
 $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{आधार} = \sqrt{3}, \text{ कर्ण} = 2$
 $\sin 2A = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{(\sqrt{3})^2}} \quad \tan A = \sin A = \cos A, \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\sin 2A = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2 \times 3}{4 \times \sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin 2A = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$
 $\frac{2 \times 3}{\sqrt{3} \times 2} = \sqrt{3}$
 $\tan 2A = \sqrt{3}$
14. $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta$
 $\text{L.H.S.} = \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$
 $\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}$
 $\frac{1}{\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta} = \sec^2 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (\text{इति सिद्धम्})$
15. $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$
 $\text{L.H.S.} (\sin \theta - \cos \theta)^2$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$
 $1 - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (\text{इति सिद्धम्})$

16. $\sin A = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$
 लम्ब = 1, कर्ण = 2
 $(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$
 $(2)^2 = (1)^2 + (\text{आधार})^2$
 $(\text{आधार})^2 = 4 - 1 = 3$
 आधार = $\sqrt{3}$
 $\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}, \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) = 1$
 $= \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)(1 - \sin^2 \theta) = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta$
 $= \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta = 1$

इति सिद्धम्

2. दिया है, $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$
 दोनों पक्षों का वर्ग करने पर—

$$\begin{aligned} (\cos \theta + \sin \theta)^2 &= (\sqrt{2} \cos \theta)^2 \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\cos \theta \cdot \sin \theta &= 2\cos^2 \theta \\ 2\cos \theta \cdot \sin \theta &= 2\cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 2\cos \theta \cdot \sin \theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 2\cos \theta \cdot \sin \theta &= (\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta) \\ 2\cos \theta \cdot \sin \theta &= (\cos \theta - \sin \theta) \cdot \sqrt{2} \cos \theta \\ \{ \because \cos \theta + \sin \theta &= \sqrt{2} \cos \theta \} \\ \frac{2\cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} &= \cos \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

अतः

$$[\sqrt{2} \sin \theta = \cos \theta - \sin \theta]$$

सिद्ध हुआ।

3. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= 2 \operatorname{cosec} A \\ \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A + (1 + \cos^2 A)^2}{(1 + \cos A) \cdot \sin A} = \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2\cos A}{(1 + \cos A) \cdot \sin A} \\ &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2\cos A}{(1 + \cos A) \cdot \sin A} = \frac{1 + 1 + 2\cos A}{(1 + \cos A) \cdot \sin A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2+2\cos A}{(1+\cos A) \cdot \sin A} \\
 &= \frac{2}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

4. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1-\cos A} + \frac{1}{1+\cos A} = 2\operatorname{cosec}^2 A \\
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1}{1-\cos A} + \frac{1}{1+\cos A} = \frac{1+\cos A + 1-\cos A}{1^2 - \cos^2 A} \\
 &= \frac{1+1}{1-\cos^2 A} = \frac{2}{\sin^2 A} \\
 &= 2\operatorname{cosec} A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

5. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1-\sin A} + \frac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A \\
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1}{1-\sin A} + \frac{1}{1+\sin A} = \frac{1+\sin A + 1-\sin A}{1-\sin^2 A} \\
 &= \frac{2}{\cos^2 A} = 2\sec^2 A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

6. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} = 2\sec \theta \\
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \frac{\sec \theta + \tan \theta + \sec \theta - \tan \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{2\sec \theta}{1} = 2\sec \theta \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

7. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} + \frac{\cos^3 \theta - \sin^3 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = 2 \\
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} + \frac{\cos^3 \theta - \sin^3 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\
 &= (\cos^2 \theta - \cos \theta \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta) + (\cos^2 \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= [1 - \cos \theta \cdot \sin \theta] + [1 + \cos \theta \cdot \sin \theta] \\
 &= 1 - \cos \theta \cdot \sin \theta + 1 + \cos \theta \cdot \sin \theta \\
 &= 2 \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

8. सिद्ध करना है—

$$\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A$$

बायाँ पक्ष

$$\begin{aligned} &= \sin^6 A + \cos^6 A \\ &= (\sin^2 A)^3 + (\cos^2 A)^3 \\ &= [\sin^2 A + \cos^2 A][(\sin^2 A)^2 - \sin^2 A \cdot \cos^2 A + (\cos^2 A)^2] \\ &= [1] \times [\sin^4 A - \sin^2 A \cdot \cos^2 A + \cos^4 A] \\ &= \sin^4 A + \cos^4 A - \sin^2 A \cdot \cos^2 A + 2\sin^2 A \cdot \cos^2 A - 2\sin^2 A \cdot \cos^2 A \\ &= (\sin^2 A)^2 + (\cos^2 A)^2 + 2\sin^2 A \cdot \cos^2 A - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A \\ &= [\sin^2 A + \cos^2 A]^2 - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A \\ &= [1]^2 - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A \\ &= 1 - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

9. सिद्ध करना है—

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} &= \sin \theta \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} \right] = \sin \theta \left[\frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right] \\ &= \sin \theta \times \frac{2}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta} \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

10. सिद्ध करना है—

$$\frac{1}{1 - \cos A} + \frac{1}{1 + \cos A} = 2 \operatorname{cosec}^2 A$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{1 - \cos A} + \frac{1}{1 + \cos A} = \frac{1 + \cos A + 1 - \cos A}{1^2 - \cos^2 A}$$

$$= \frac{1 + 1}{1 - \cos^2 A} = \frac{2}{\sin^2 A}$$

$$= 2 \operatorname{cosec}^2 A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}$$

सिद्ध हुआ।

$$11. \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} \times \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta + 1} \\ &= \frac{(\sin \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - (1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin^2 \theta + 1 + 2\sin \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cdot \cos \theta - 1} \\
&= \frac{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta - \cos^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cdot \cos \theta - 1} \\
&= \frac{2\sin^2 \theta + 2\sin \theta}{2\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{2\sin \theta (\sin \theta + 1)}{2\sin \theta \cdot \cos \theta} \\
&= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \\
&= \tan \theta + \sec \theta \\
&= \frac{\tan \theta + \sec \theta (\tan \theta - \sec \theta)}{\tan \theta - \sec \theta} \\
&= \frac{\tan^2 \theta - \sec^2 \theta}{\tan \theta - \sec \theta} \\
&= \frac{-[\sec^2 \theta - \tan^2 \theta]}{-[\sec \theta - \tan \theta]} \\
&= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} [\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

12.

$$\begin{aligned}
\tan \theta &= 3 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{1} \\
(\text{कर्ण})^2 &= (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2 \\
(\text{कर्ण})^2 &= (3)^2 + (1)^2 \\
\text{कर्ण} &= \sqrt{9+1} \\
\sin \theta &= \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}, \text{ कर्ण} = \sqrt{10} \\
&= \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\
\sin^2 \theta - \cos^2 \theta &\Rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \\
&= \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{9-1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

$$\begin{aligned}
1. \quad \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} &= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} \\
\text{L.H.S.} &= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}
\end{aligned}$$

$$\frac{\cos A - \cos A \cdot \sin A}{\cos A + \cos A \cdot \sin A} = \frac{\cos A (1 - \sin A)}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} A}}{1 + \frac{1}{\operatorname{cosec} A}}$$

$$\frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

2. सिद्ध करना है—

$$\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} + \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = 2 \operatorname{cosec} A$$

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} + \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \cos A}}{\sqrt{1 - \cos A}} + \frac{\sqrt{1 - \cos A}}{\sqrt{1 + \cos A}} = \frac{(\sqrt{1 + \cos A})^2 + (\sqrt{1 - \cos A})^2}{\sqrt{1 - \cos A} \cdot \sqrt{1 + \cos A}} \\ &= \frac{1 + \cos A + 1 - \cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 A}} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} \\ &= 2 \operatorname{cosec} A \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

3. सिद्ध करना है—

$$\frac{\cot A - 1}{2 - \sec^2 A} = \frac{\cot A}{1 + \tan A}$$

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\cot A - 1}{2 - \sec^2 A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - 1}{2 - \frac{1}{\cos^2 A}} \\ &= \frac{\left(\frac{\cos A - \sin A}{\sin A} \right)}{\left(\frac{2 \cos^2 A - 1}{\cos^2 A} \right)} = \frac{\cos A - \sin A}{\sin A} \times \frac{\cos^2 A}{2 \cos^2 A - 1} \\ &= \frac{(\cos A - \sin A)}{\sin A} \times \frac{\cos^2 A}{2 \cos^2 A - (\cos^2 A + \sin^2 A)} \\ &= \frac{(\cos A - \sin A)}{\sin A} \times \frac{\cos^2 A}{2 \cos^2 A - \cos^2 A - \sin^2 A} \\ &= \frac{(\cos A - \sin A)}{\sin A} \times \frac{\cos^2 A}{(\cos^2 A - \sin^2 A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\cos A - \sin A) \cdot \cos^2 A}{\sin A \cdot (\cos A - \sin A)(\cos A + \sin A)} \\
&= \frac{\cos^2 A}{\sin A \cdot (\cos A + \sin A)} \\
&= \frac{\cos^2 A}{\sin A \cdot \cos A \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A}\right)} \\
&= \frac{\cos A}{\sin A} \times \frac{1}{(1 + \tan A)} \\
&= \frac{\cot A}{(1 + \tan A)} \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
\end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

4. $\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S. } &(\sec A - \sec A \cdot \sin A)(\sec A + \tan A) \\
&= \left(\sec A - \frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sec A + \tan A) \\
&= (\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) \\
&= (\sec^2 A - \tan^2 A) = 1
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

5. सिद्ध करना है—

$$\frac{1 + \cos \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta} = \cot \theta$$

$$\begin{aligned}
\text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1 + \cos \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta} \\
&= \frac{1 - \sin^2 \theta + \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\
&= \frac{\cos^2 \theta + \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\
&= \frac{\cos \theta (\cos \theta + 1)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= \cot \theta \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
\end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

6. सिद्ध करना है—

$$2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{बायाँ पक्ष} &= 2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 \\
&= 2[(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta)] \\
&\quad - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 \\
&= 2[1 \times (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta)] - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 \\
&= 2(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + 1 \\
&= -[\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta] \\
&\quad - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + 1 \\
&= -[\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta] + 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \\
&\quad - 2\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + 1 \\
&= -[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^2 + 1 = -(1)^2 + 1 \\
&= -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
\end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

7. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sin \theta \cdot \cos \theta \\
\text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)} + \frac{\cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)} \\
&= \frac{\sin^3 \theta}{(\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^3 \theta}{(\cos \theta - \sin \theta)} \\
&= \frac{\sin^3 \theta}{(\sin \theta - \cos \theta)} - \frac{\cos^3 \theta}{(\sin \theta - \cos \theta)} = \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{(\sin \theta - \cos \theta)} \\
&= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta)}{(\sin \theta - \cos \theta)} \\
&= (1 + \sin \theta \cdot \cos \theta) \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
\end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

8. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
&(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta) = 2 \\
\text{बायाँ पक्ष} &= (1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta) \\
&= \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right) \\
&= \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta}\right) \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}\right) \\
&= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1^2}{\cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\cos \theta \cdot \sin \theta - 1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \\
&= \frac{1 + 2\cos \theta \cdot \sin \theta - 1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{2\cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \\
&= 2 \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
\end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

9. सिद्ध करना है—

$$\frac{\cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + 1} + \frac{\operatorname{cosec} \theta + 1}{\cot \theta} = 2\sec \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + 1} + \frac{\operatorname{cosec} \theta + 1}{\cot \theta} \\
 &= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{1}{\sin \theta} + 1} + \frac{\frac{1}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)}{\left(\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}\right)} + \frac{\left(\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}\right)}{\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta) \cdot \cos \theta} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta + 1 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta}{(1 + \sin \theta) \cdot \cos \theta} = \frac{1 + 1 + 2 \sin \theta}{(1 + \sin \theta) \cdot \cos \theta} \\
 &= \frac{2(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta) \cdot \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \\
 &= 2 \sec \theta \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

10. सिद्ध करना है—

$$\begin{aligned}
 &\frac{\tan \theta}{\sec \theta - 1} - \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = 2 \cot \theta \\
 \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{\tan \theta}{\sec \theta - 1} - \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} \\
 &= \tan \theta \left[\frac{1}{\sec \theta - 1} - \frac{1}{\sec \theta + 1} \right] = \tan \theta \left[\frac{(\sec \theta + 1) - (\sec \theta - 1)}{(\sec \theta - 1)(\sec \theta + 1)} \right] \\
 &= \tan \theta \left[\frac{\sec \theta + 1 - \sec \theta + 1}{\sec^2 \theta - 1} \right] = \tan \theta \left[\frac{2}{\tan^2 \theta} \right] \\
 &= \frac{2}{\tan \theta} = 2 \cot \theta \Rightarrow \text{दायाँ पक्ष।}
 \end{aligned}$$

सिद्ध हुआ।

$$\begin{aligned}
 11. \quad (i) \quad \text{L.H.S.} &= (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\
 &\left[\because \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ तथा } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \\
 &= \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} \quad [\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta] \\
 &= \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \quad [\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)] \\
 &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

$$\text{अतः } (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

इति सिद्धम्।

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) L.H.S.} &= \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A (1+\sin A)} \\
 &= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A (1+\sin A)} \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab] \\
 &= \frac{1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2\sin A}{\cos A (1+\sin A)} \\
 &= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A (1+\sin A)} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1] \\
 &= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A (1+\sin A)} = \frac{2}{\cos A} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{\cos A} = 2\sec A = \text{R.H.S.} \quad \left[\because \frac{1}{\cos A} = \sec A \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{अतः } \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$$

इति सिद्धम्।

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) L.H.S.} &= \frac{\tan \theta}{1-\cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1-\tan \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \quad \left[\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ तथा } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \quad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)] \\
 &= \frac{1 + \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} + 1 = \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta + 1$$

$$= 1 + \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta \quad \left[\because \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ तथा } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \right]$$

= R.H.S.

$$\text{अतः } \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

इति सिद्धम्।

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (d) 2. (b) 3. (d) 4. (b) 5. (b) 6. (d) 7. (a) 8. (c)
9. (d) 10. (d)

अधिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (b) 2. (a) 3. (e) 4. (b)

चित्र आधारित प्रश्न

1. दिया है—

Δ , AC का मध्य बिन्दु है, तब

$$AD = CD = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ m}$$

अब, ΔBDC में, $\angle D = 90^\circ$,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$$

$$\Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = (BD)^2 + (6)^2$$

$$\Rightarrow (BD)^2 = 72 - 36$$

$$\Rightarrow (BD)^2 = 36 \Rightarrow BD = 6 \text{ m}$$

अतः BD की लम्बाई 6 मीटर है।

2. चित्र से,

ΔABD में, $\angle D = 90^\circ$ तब

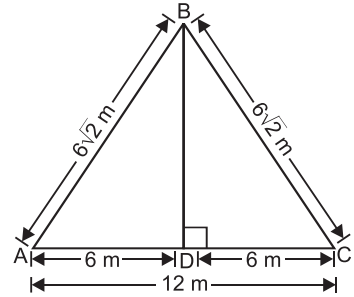
$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\tan A = \frac{BD}{AD}$$

$$\tan A = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \tan A = \tan 45^\circ \Rightarrow \angle A = 45^\circ$$

इसी प्रकार,

ΔBDC में, $\angle D = 90^\circ$ तब



$$\tan C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow \tan C = \tan 45^\circ$$

$$\tan C = \frac{6}{6} \Rightarrow \tan C = 1 \Rightarrow \tan C = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C = 45^\circ$$

अतः $\angle A$ व $\angle B$ की माप 45° है।

3. हमें ज्ञात है,

$$\angle A = \angle C = 45^\circ \text{ तब}$$

$$\begin{aligned} \sin A + \cos C &= \sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

अतः $\sin A + \cos C$ का मान $\sqrt{2}$ होगा।

4. हमें ज्ञात है,

$$\angle A = \angle C = 45^\circ \text{ तब}$$

$$\begin{aligned} \tan^2 C + \tan^2 A &= \tan^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

अतः $\tan^2 C + \tan^2 A$ का मान 2 होगा।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (a) 2. (b) 3. (d) 4. (d)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(ii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. असत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. असत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. दिया है—

$$n = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \text{ तथा } m = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\text{तब बायाँ पक्ष} = (m^2 - n^2) \sin^2 \beta$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2 - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 \right] \sin^2 \beta \\
&= \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right) \sin^2 \beta \\
&= \left(\frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta} \right) \sin^2 \beta \\
&= \frac{(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \beta) \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \\
&= \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\
&= \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \\
&= \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = 1 - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 \\
&= 1 - n^2 \\
&= \text{दायाँ पक्ष}
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

2. बायाँ पक्ष $= 2(\sin^2 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1$
 $= 2[(\sin^2 \theta)^3 + (\cos^2 \theta)^3] - 3[(\sin^2 \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2] + 1$

हमें ज्ञात है—

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{ तथा } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, \text{ तब} \\
&= 2[(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] \\
&\quad - 3[(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta] + 1 \\
&= 2[1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta] - 3[1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta] + 1 \\
&= 2 - 6\sin^2 \theta \cos^2 \theta - 3 + 6\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1 \\
&= 3 - 3 = 0 \\
&= \text{दायाँ पक्ष}
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

3. दिया है—

$$x = a \sin \theta \text{ तथा } y = t \tan \theta$$

तब $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2}$ में x व y के मान रखने पर,

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{(a \sin \theta)^2} - \frac{b}{(b \tan \theta)^2} = \frac{a^2}{a \sin^2 \theta} - \frac{b}{b \tan^2 \theta} \\
&= \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta \\
&= 1 \quad [\because \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1]
\end{aligned}$$

4. प्रश्न के अनुसार,

$$\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = p$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = p$$

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = p$$

$$\left[\because \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ तथा } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

दायें पक्ष व बायें पक्ष का वर्ग करने पर,

$$\left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = p^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{p^2}{1}$$

घटक और लाभांश नियम से,

$$\frac{1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + \sin^2 \theta} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{1 + 1 + 2 \cos \theta} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{2 + 2 \cos \theta} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos \theta (1 + \cos \theta)}{2 (1 + \cos \theta)} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$$

अतः सिद्ध हुआ।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (b) दिया गया है—

$$QR = 2 \text{ मीटर}$$

$$QS = 3 \text{ मीटर}$$

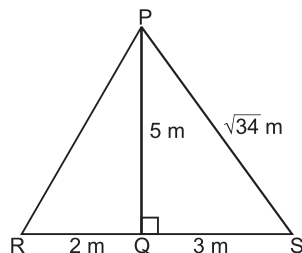
$$PQ = 5 \text{ मीटर}$$

$\triangle PQS$ में, $\angle Q = 90^\circ$ तब

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(PS)^2 = (PQ)^2 + (QS)^2 \Rightarrow (PS)^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$(PS)^2 = 25 + 9 \Rightarrow (PS)^2 = 34$$



$$\Rightarrow PS = \sqrt{34}$$

$$\text{तब, } \sec S = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow \sec S = \frac{PS}{QS}$$

$$\text{अतः } \sec S = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

2. (a) चित्र से—

ΔPQR में, $\angle Q = 90^\circ$ तब,

पाइथागोरस प्रमेय से,

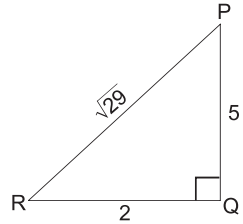
$$(PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2 \\ = (5)^2 + (2)^2 = 25 + 4 = 29$$

$$PR = \sqrt{29}$$

$$\text{तब, } \operatorname{cosec} R = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

$$\operatorname{cosec} R = \frac{PR}{PQ} \Rightarrow \operatorname{cosec} R = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\text{अतः } \operatorname{cosec} R = \frac{\sqrt{29}}{5}$$



3. (c) चित्र से—

ΔPQS में,

$$\tan S = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow \tan S = \frac{PQ}{QS} \Rightarrow \tan S = \frac{5}{3}$$

तथा ΔPQR में,

$$\cot R = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{QR}{PQ} \Rightarrow \cot R = \frac{2}{5}$$

$$\text{तब } \tan S + \cos R = \frac{5}{3} + \frac{2}{5} = \frac{25+6}{15}$$

$$\text{अतः } \tan S + \cos R = \frac{31}{15}$$

4. (d) चित्र से—

ΔPQR में,

$$\sin R = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \sin R = \frac{PQ}{PR}$$

$$\sin R = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \sin^2 R = \frac{25}{29}$$

इसी प्रकार,

ΔPQS में,

$$\cos S = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \cos S = \frac{QS}{PS}$$

$$\cos S = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos^2 S = \frac{9}{34}$$

$$\text{अब } \sin^2 R - \cos^2 R = \frac{25}{29} - \frac{9}{34} = \frac{850 - 261}{986} = \frac{589}{986}$$

$$\text{अतः } \sin^2 R - \cos^2 R = \frac{589}{986}$$

5. (d) चित्र से—

ΔPQS में,

$$\sin S = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \sin S = \frac{PQ}{PS} \Rightarrow \sin S = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\text{तब } \sin^2 S = \frac{25}{34}$$

इसी प्रकार,

ΔPQR में,

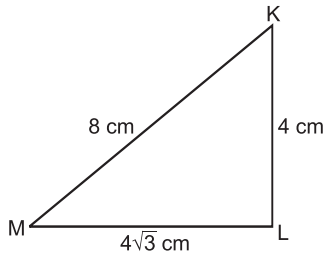
$$\cos R = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \cos R = \frac{QR}{PR} \Rightarrow \cos R = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\text{तब } \cos^2 R = \frac{4}{29}$$

$$\text{अतः } \sin^2 S + \cos^2 R = \frac{25}{34} + \frac{4}{29} = \frac{725 + 136}{986} = \frac{861}{986}$$

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (a) चित्र से—



$$KL = 4 \text{ सेमी, } ML = 4\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

$$MK = 8 \text{ सेमी तथा } \angle KLM = 90^\circ$$

$$\text{तब } \sin \angle KML = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{KL}{KM}$$

$$\sin \angle KML = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \angle KML = \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KML = 30^\circ$$

अतः $\angle KML$ का मान 30° होगा।

2. (c) चित्र से—

$\angle MKL$ के लिए, त्रिभुज का आधार KL तथा लम्ब ML होगा, तब

$$\sin \angle MKL = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{ML}{MK} = \frac{4\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin \angle ML = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \angle MKL = \sin 60^\circ$$

$$\angle MKL = 60^\circ$$

अतः $\angle MKL$ का मान 60° होगा।

3. (b) चित्र से—

$\triangle KLM$ में,

$$\tan M = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \tan M = \frac{KL}{ML}$$

$$\tan M = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan M = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अतः $\tan M$ का मान $\frac{1}{\sqrt{3}}$ होगा।

4. (a) चित्र से—

$\triangle KLM$ में,

$$\sec M = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow \sec M = \frac{MK}{ML}$$

$$\sec M = \frac{8}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sec M = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{अब } \sec^2 M - 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{हम जानते हैं—} \tan M = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan^2 M = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sec^2 M - 1 = \tan^2 M$$

प्रश्नावली 9 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि कोई प्रेक्षक किसी ऐसी वस्तु का देखना चाहता है, जो उसकी आँख से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा के नीचे स्थित है, तो प्रेक्षक को उस वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को नीचे की ओर झुकाना पड़ेगा। इस प्रक्रम में दर्शक की दृष्टि क्षैतिज से एक निश्चित कोण से घूम जाएगी। इस कोण को वस्तु का अवनमन कोण अथवा अवनतांश अथवा अवनति कोण कहते हैं।

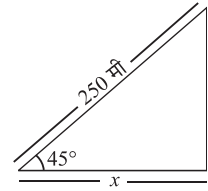
2. $\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{250}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{250}$$

$$x = \frac{250}{\sqrt{2}}$$

$$x = 125\sqrt{2} = 125 \times 1.414 = 176.75 \text{ मी}$$



3. माना स्तम्भ की ल० = x

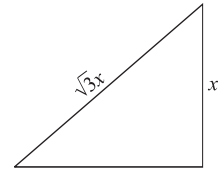
तब स्तम्भ की परछाई की ल० = $\sqrt{3}x$

$$\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{3}x}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \tan 30^\circ$$

$$\theta = 30^\circ$$



4. माना, खम्भे की ऊँचाई = x

तब खम्भे की ऊँचाई = $\frac{1}{\sqrt{3}}x$

$$\tan \theta = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\tan \theta = \tan 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

अतः यह सिद्ध हुआ सूर्य का उन्नयन कोण 60° है।

5. दिया है, ऊर्ध्वाधर मीनार की ऊँचाई = 45 मी
तथा मीनार की छायाँ की लम्बाई = $45\sqrt{3}$ मी

$$\therefore \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \theta = \frac{45 \text{ मी}}{45\sqrt{3} \text{ मी}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \tan 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

अतः सूर्य का उन्नयन कोण 30° है।

6. दिया है, पतंग की डोरी की लम्बाई = 100 मी
तथा पतंग द्वारा क्षैतिज समतल से बना कोण = 60°

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} AB = BC$$

अब, $\triangle ABC$ में—

पाइथागोरस प्रमेय से—

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$AC^2 = (\sqrt{3} AB)^2 + AB^2$$

$$(100 \text{ मी})^2 = 3 AB^2 + AB^2$$

$$10,000 \text{ मी}^2 = 4 AB^2$$

$$\therefore AB^2 = \frac{10,000}{4} \text{ मी}^2$$

$$AB^2 = 2500 \text{ मी}^2$$

$$AB = \sqrt{2500} \text{ मी}$$

$$AB = 50 \text{ मी}$$

अतः पतंग की क्षैतिज समतल से कुल ऊँचाई 50 मीटर है।

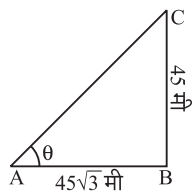
7. दिया है, किसी मीनार के पाद से किसी बिन्दु के बीच की दूरी = 20 मी तथा मीनार के शिखर की उस बिन्दु से दूरी = 40 मी

$$\therefore \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

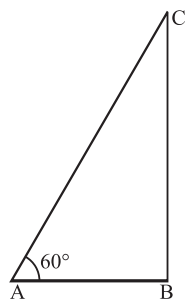
$$= \frac{20 \text{ मी}}{40 \text{ मी}} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \cos 60^\circ$$

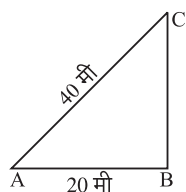
$$\therefore \theta = 60^\circ$$



सिद्ध हुआ।



$$\{\because BC = \sqrt{3} AB\}$$



$$\text{अब,} \quad \tan 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC}{20} \text{ मी}$$

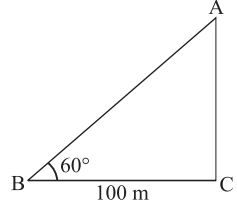
$$20\sqrt{3} \text{ मी} = BC$$

अतः मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा मीनार की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ मीटर है।

$$8. \tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{100}$$

$$\sqrt{3} \times 100 = AC = 173.20 \text{ मीटर}$$



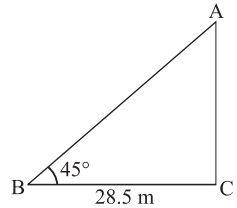
लघु उत्तरीय प्रश्न

$$1. \quad \tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{28.5}$$

$$AC = 28.5 \text{ मी०}$$

चिमनी की लम्बाई = $28.5 + 1.5 = 30$ मी०



$$2. \quad \tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{40}$$

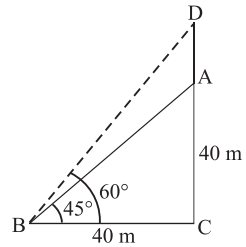
$$40 = AC$$

$$\tan 60^\circ = \frac{DC}{40}$$

$$DC = \sqrt{3} \times 40 = 69.28 \text{ मी०}$$

$$AD = 69.28 - 40$$

$$AD = 29.28 \text{ मी०}$$



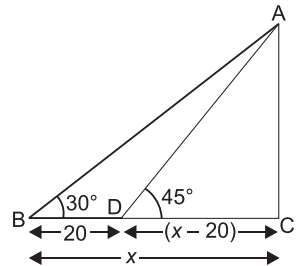
3. माना आधार की लम्बाई = x मीटर

$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{x}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = AC$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{x-20}$$



$$x - 20 = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = x$$

$$x - \sqrt{3}x = 20\sqrt{3}$$

$$x(1 - \sqrt{3}) = 20\sqrt{3} - x \times 0.732 = 34.64$$

$$x = 47.32$$

जब प्रेक्षक मीनार की ओर 20 मीटर चलता है।

$$DC = 47.32 - 20 = 27.32 \text{ मी०}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{DC}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{27.32}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{27.32}$$

$$1 = \frac{AC}{27.32}$$

$$AC = 27.32 \text{ मीटर}$$

4. दिया है, खिड़की की सड़क के तल से ऊँचाई = 10 मी

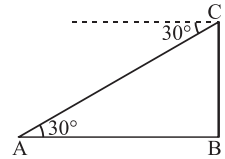
तथा कार का अवनमन कोण = 30°

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10 \text{ मी}}{AB}$$

$$AB = 10\sqrt{3} \text{ मी}$$

अतः मकान तथा कार के बीच की क्षैतिज दूरी $10\sqrt{3}$ मीटर है।



5. $\triangle SPR$ में—

$$\tan \theta = \frac{SR}{PR}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SR}{x}$$

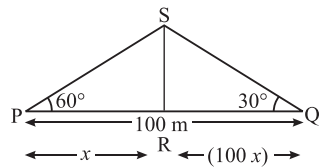
$$\sqrt{3}x = SR$$

$\triangle SQR$ में—

$$\tan 30^\circ = \frac{SR}{RQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SR}{100 - x}$$

$$SR = \frac{100 - x}{\sqrt{3}}$$



पेड़ की ऊँचाई तो समान ही रहेंगी।

$$\sqrt{3}x = \frac{100-x}{\sqrt{3}}$$

$$3x = 100 - x$$

$$4x = 100$$

$$x = \frac{100}{4}$$

$$x = 25$$

फिर से $\triangle SPR$ में—

$$\tan \theta = \frac{SR}{PR}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SR}{25}$$

$$\sqrt{3} \times 25 = SR$$

$$SR = 43.30 \text{ मीटर}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई 43.30 मीटर है।

6. दिया है—मीनार की ऊँचाई (h) मी है।

$$\angle ABD = \alpha \text{ और } \angle ACD = \beta$$

माना

$$CD = y \text{ और } BC = x$$

$\triangle ABD$ में,

$$\tan \alpha = \frac{AD}{BD}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{BC + CD} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{x + y}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{x + y}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{h}{\tan \alpha}$$

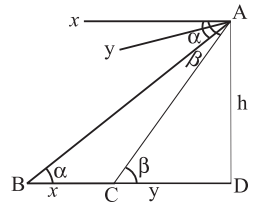
$$\Rightarrow y = \frac{h}{(\tan \alpha) - x} \quad \dots(i)$$

$\triangle ACD$ में—

$$\tan \beta = \frac{AD}{CD}$$

$$\tan \beta = \frac{h}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{h}{\tan \beta} \quad \dots(ii)$$



समी (i) और समीकरण (ii) की तुलना करने पर—

$$\frac{h}{\tan \alpha} - x = \frac{h}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow x = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow x = h \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)$$

$$x = h (\cot \alpha - \cot \beta)$$

अर्थात् दो बिन्दुओं के बीच की आवश्यक दूरी $= h (\cot \alpha - \cot \beta)$ है।

7. असत्य

स्पष्टीकरण—

इसे एक उदाहरण से समझते हैं—यदि $2\sqrt{3}$ मी० ऊँची किसी मीनार की छाया 2 मीटर लंबी भूमि पर पड़ती है तो सूर्य का उन्नयन कोण 60° होता है।

$$\Delta ACB \text{ में } \tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \quad \left(\because \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \right)$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

अब, यदि मीनार की समान ऊँचाई पर उसकी पिछली लंबाई से 4 मी० अधिक छाया पड़ती है, तो सूर्य का उन्नयन कोण 30° हो जाता है।

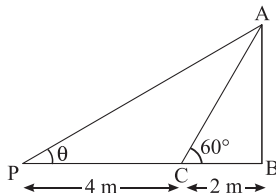
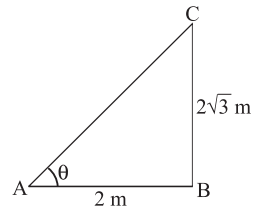
$$\Delta APB \text{ में, } \tan \theta = \frac{AB}{PB} = \frac{AB}{PC + CB}$$

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4 + 2} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$



इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जैसे-जैसे मीनार की छाया की लंबाई बढ़ती है, सूर्य का उन्नयन कोण घटता जाता है।

8. दिया है, टीले PQ से बिन्दु O तक की दूरी = 15 मी

तथा $\angle OPS = 60^\circ$

तब $\angle POQ = 60^\circ$

अब, ΔPOQ में—

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{PQ}{OQ}$$

$$\sqrt{3} = \frac{PQ}{15 \text{ मी}}$$

$\therefore PQ = 15\sqrt{3}$ मीटर

अतः टीले की ऊँचाई $15\sqrt{3}$ मीटर है।

9. माना, मीनार की ऊँचाई = MN

तथा $\angle MPN = \theta$

तब, $\angle MQN = 90^\circ - \theta$

$\therefore \angle P$ तथा $\angle Q$ कोटिपूरक हैं।

ΔMPN में—

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{MN}{PN}$$

$$\tan \theta = \frac{MN}{a}$$

अब, ΔMQN में—

$$\tan (90^\circ - \theta) = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{MN}{QN}$$

$$\cot \theta = \frac{MN}{b}$$

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{MN}{b}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{MN}$$

...(2)

समीकरण (1) व (2) से

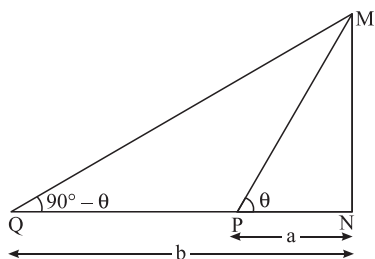
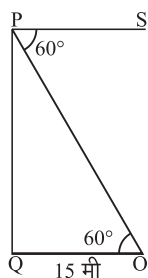
$$\frac{MN}{a} = \frac{b}{MN}$$

$$MN \times MN = a \times b$$

$$MN^2 = ab$$

$$MN = \sqrt{ab}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।



...(1)

सिद्ध हुआ।

10. माना, वृक्ष का ऊपरी भाग जो टूटकर जमीन से छू गया उसमी लम्बाई = AB

शेष बचे खड़े वृक्ष की लम्बाई = AC

तथा वृक्ष की जड़ से उस बिन्दु तक जहाँ वृक्ष का शिखर जमीन को छूता है, तक की दूरी = BC

ΔABC में, $BC = 10$ मी

तथा

$$\angle ABC = 45^\circ$$

तब,

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{BC}$$

$$1 = \frac{AC}{10 \text{ मी}}$$

$\therefore$

$$AC = 10 \text{ मी}$$

पाइथागोरस प्रमेय से—कर्ण² = लम्ब² + आधार²

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

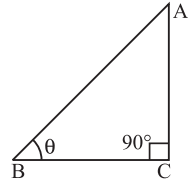
$$AB^2 = (10 \text{ मी})^2 + (10 \text{ मी})^2$$

$$= 100 \text{ मी}^2 + 100 \text{ मी}^2 = 200 \text{ मी}^2$$

$\therefore$

$$AB = \sqrt{200} \text{ मी} = 10\sqrt{2} \text{ मी या } 14.14 \text{ मी}$$

अतः वृक्ष की कुल ऊँचाई = $10 \text{ मी} + 14.14 \text{ मी} = 24.14 \text{ मीटर}$



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. माना मीनार की ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ मीटर

तथा आधार से प्रेक्षक की दूरी = x

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \sqrt{3} \times 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

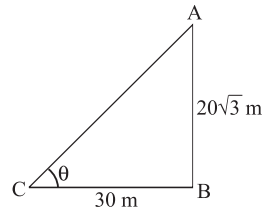
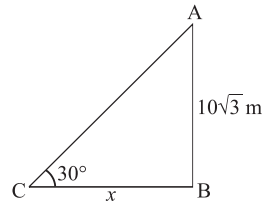
$$x = 10 \times 3 = 30 \text{ मीटर}$$

अब यदि ऊँचाई दोगनी कर दे तब ऊँचाई = $20\sqrt{3}$ मीटर

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{20\sqrt{3}}{30}$$

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.15) < 60^\circ$$

अतः अभीष्ट कोण दोहरा नहीं है।

2. यह कथन सत्य है।

स्पष्टीकरण—

स्थिति-I मान लीजिए कि एक मीनार की ऊँचाई h है और उसके बाद से प्रेक्षक बिंदु की दूरी x है।

$$\Delta ABC \text{ में, } \tan \theta_1 = \frac{AC}{BC} = \frac{h}{x} \quad \dots(i)$$

स्थिति-II अब, एक मीनार की ऊँचाई बढ़ गई

$$\begin{aligned} 10\% &= h + h \text{ का } 10\% \\ &= h + \frac{h-10}{100} = \frac{11h}{100} \end{aligned}$$

तथा प्रेक्षक बिन्दु की उसके पाव से दूरी $= x + x$ का 10%

$$x + x \times \frac{10}{100} = \frac{11x}{10}$$

$$\Delta PQR \text{ में, } \tan \theta_2 = \frac{PR}{QR} = \frac{\left(\frac{11h}{10}\right)}{\left(\frac{11x}{10}\right)}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{h}{x} \quad \dots(ii)$$

समी (i) व (ii) से—

हमें $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ प्राप्त होता है।

अतः इसके शीर्ष का उन्नयन कोण अपरिवर्तित रहेगा।

3. माना मीनार से प्रेक्षक की दूरी x है तब

ΔCAB में

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{20}{x}$$

$$1 = \frac{20}{x}$$

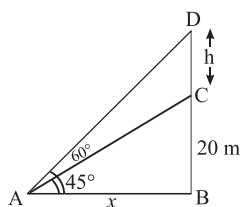
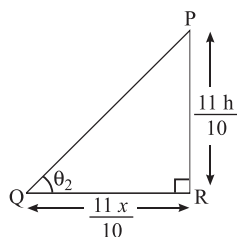
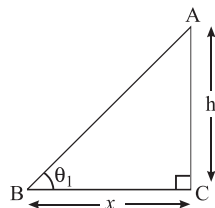
$$x = 20 \text{ मी}$$

माना संचार मीनार CD की ऊँचाई h है।

तब

$$BD = BC + DC$$

$$BD = 20 + h$$



ΔBAD में—

$$\tan \theta = \frac{BD}{AB}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{20+h}{20}$$

$$\sqrt{3} = \frac{20+h}{20}$$

$$20\sqrt{3} = 20+h$$

$$h = 20\sqrt{3} - 20$$

$$h = 20(\sqrt{3} - 1)$$

$$h = 20(1.732 - 1)$$

$$h = 14.64 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार (संचार) की ऊँचाई 14.64 मीटर है।

4. CBD में, माना आधार x है, तब

$$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{x}$$

$$1 = \frac{h}{x}$$

$$h = x \text{ मीटर}$$

अतः पेडस्टल की ऊँचाई = प्रेक्षक की पेडस्टल से दूरी

ΔABC में

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{1.6+h}{x} \quad (AC = AD + CD)$$

$$\sqrt{3} = \frac{1.6+h}{h}$$

$$\sqrt{3}h = 1.6 + h$$

$$\sqrt{3}h - h = 1.6$$

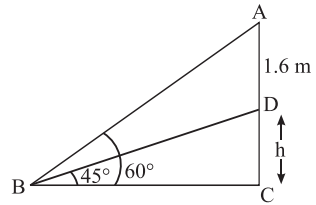
$$h(\sqrt{3} - 1) = 1.6$$

$$h \times 0.732 = 1.6$$

$$h = \frac{1.6}{0.732}$$

$$h = \frac{16000}{7320}$$

$$h = 2.18 \text{ मीटर}$$



5. माना, मीनार की ऊँचाई $(AD) = h$
 पहले बिन्दु से मीनार की दूरी $= BD$
 तथा दूसरे बिन्दु से मीनार की दूरी $= CD$
 ΔABD में—

$$\tan \theta = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{h}{x} \quad [5x = 3h]$$

अब, ΔACD में—

$$\tan \phi = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{h}{(x - 32 \text{ मी})}$$

$$5(x - 32 \text{ मी}) = 2h$$

$$5x - 160 \text{ मी} = 2h$$

$$3h - 160 \text{ मी} = 2h$$

$$3h - 2h = 160 \text{ मी}$$

$$h = 160 \text{ मी}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 160 मीटर है।

6. माना, नाव की प्रारम्भिक स्थिति $= B$
 तथा नाव की बाद की स्थिति $= C$
 पुल की जल से ऊँचाई $= AD$
 माना, $BD = x$ मीटर
 ΔABD में—

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{BD}$$

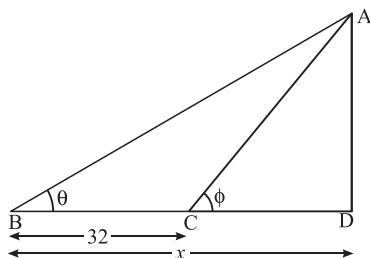
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{x}$$

$$AD = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

ΔACD में—

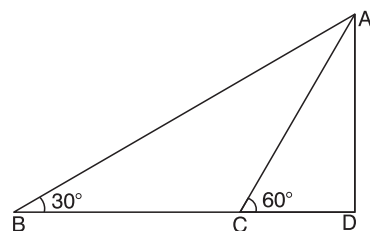
$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{CD}$$

$$AD = \sqrt{3} \cdot CD$$



$$\{\because BD = BC + CD\}$$

$$\{\because 5x = 3h\}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = AD$$

$$\dots(1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AD}{CD}$$

$$\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से—

$$\sqrt{3} \cdot CD = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times CD = x$$

$$3 \times CD = BC + CD$$

$$\{\because BD = BC + CD\}$$

$$3CD - CD = BC$$

$$2 \cdot CD = BC$$

$\therefore$ नाव द्वारा 4 मिनट में तय दूरी = BC

या नाव द्वारा 4 मिनट में तय दूरी = $2CD$

$\therefore$ नाव द्वारा 1 मिनट में तय दूरी = $\frac{BC}{4}$ या $\frac{CD}{2}$

अतः CD दूरी को तय करने में लगोग समय = $\frac{4}{2} \Rightarrow 2$ मिनट

अतः नाव को पुल तक पहुँचने में 2 मिनट का समय और लगेगा।

7. दिया है, $\tan \theta = \frac{5}{12}$ तथा $\tan \phi = \frac{3}{4}$

माना, ऊर्ध्वाधर खड़ी मीनार की ऊँचाई = AD

ΔACD में—

$$\tan \phi = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{AD}{CD}$$

$$3CD = 4AD$$

ΔABD में—

$$\tan \theta = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AD}{BC + CD}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{AD}{192 \text{ मी} + CD}$$

$$5 \times (192 \text{ मी} + CD) = 12AD$$

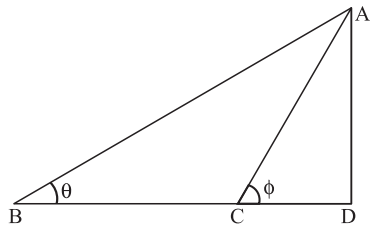
$$960 \text{ मी} + 5CD = 12AD$$

$$960 \text{ मी} + 5 \times \frac{4}{3} AD = 12AD$$

$$960 \text{ मी} = 12AD - \frac{20}{3} AD$$

$$960 \text{ मी} = \frac{36AD - 20AD}{3}$$

$$960 \times 3 \text{ मी} = 16AD$$



$$\therefore AD = \frac{960 \times 3}{16} \text{ मी} = (60 \times 3) \text{ मी}$$

$$AD = 180 \text{ मी}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 180 मीटर है।

8. माना, मीनार की ऊँचाई $(DC) = h$

तथा $\angle A = \theta$

तब $\angle B = 90^\circ - \theta$

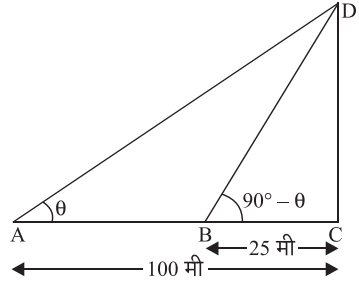
$\therefore \angle A$ तथा $\angle B$ कोटिपूरक हैं।

अब, $\triangle DAC$ में—

$$\tan \theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan \theta = \frac{h}{100 \text{ मी}}$$

...(1)



तथा, $\triangle DBC$ में—

$$\tan (90^\circ - \theta) = \frac{DC}{BC}$$

$\Rightarrow$

$$\cot \theta = \frac{h}{25 \text{ मी}}$$

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{h}{25 \text{ मी}}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{25 \text{ मी}}{h}$$

...(2)

समीकरण (1) व (2) से—

$$\frac{h}{100 \text{ मी}} = \frac{25 \text{ मी}}{h}$$

$\Rightarrow$

$$h \times h = (25 \times 100) \text{ मी}^2$$

$$h^2 = 2500 \text{ मी}^2 \Rightarrow$$

$$h = \sqrt{2500} \text{ मी}$$

$$h = 50 \text{ मी}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 50 मीटर है।

9. माना, हवाई जहाज की चाल $= x$ मी/से०

तब, 15 सेकण्ड में तय दूरी $= 15x$ मीटर

हवाई जहाज की जमीन से क्षैतिज ऊँचाई $= 1500\sqrt{3}$ मीटर

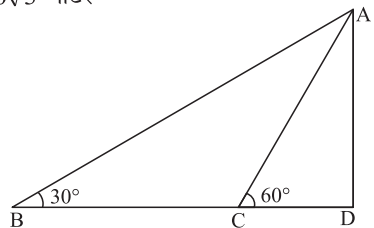
$\triangle ACD$ में—

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{CD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{1500\sqrt{3} \text{ मी}}{CD}$$

$\therefore$

$$CD = 1500 \text{ मी}$$



अब, ΔABD में—

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1500\sqrt{3} \text{ मी}}{BC + CD}$$

$$BC + CD = 1500\sqrt{3} \times \sqrt{3} \text{ मी}$$

$$15x + 1500 \text{ मी} = 1500 \times 3 \text{ मी}$$

$$15x = 4500 \text{ मी} - 1500 \text{ मी}$$

$$15x = 3000 \text{ मी}$$

$$x = \frac{3000}{15} \Rightarrow 200$$

$$\therefore \text{हवाई जहाज की चाल} = 200 \text{ मी/सेकण्ड} = 200 \times \frac{18}{5} \text{ किमी/घण्टा}$$

$$= \frac{3600}{5} \text{ किमी/घण्टा}$$

$$= 720 \text{ किमी/घण्टा}$$

अतः हवाई की चाल 200 मीटर प्रति सेकण्ड या 720 किमी प्रति घण्टा है।

10.

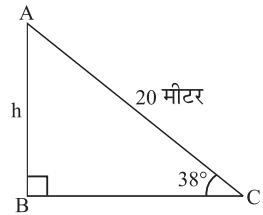
$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

$$h = \frac{20}{2}$$

$$h = 10 \text{ मीटर}$$



11. माना, मीनार की ऊँचाई = AD तथा मकान की ऊँचाई = $BC = ED$

सड़क की चौड़ाई = $BE = CD$

दिया है, मकान के आधार से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण = 60°

तथा मीनार के शिखर का अवनमन कोण = 45°

अब, ΔABE में—

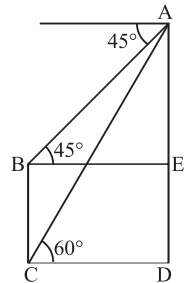
$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{BE}$$

$$1 = \frac{AE}{12 \text{ मी}}$$

$$\therefore AE = 12 \text{ मी}$$

तथा ΔACD में—

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{CD}$$



$$\sqrt{3} = \frac{AD}{12 \text{ मी}}$$

$$\therefore AD = 12\sqrt{3} \text{ मी या } 20.78 \text{ मी}$$

$$\therefore AD = AE + ED$$

$$\begin{aligned}\therefore ED &= AD - AE = 12\sqrt{3} \text{ मी} - 12 \text{ मी} \\ &= 20.78 \text{ मी} - 12 \text{ मी} \\ &= 8.78 \text{ मी}\end{aligned}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $12\sqrt{3}$ मी या 20.78 मी तथा मकान की ऊँचाई 8.78 मी है।

12. माना, मीनार की ऊँचाई = AB तथा क्षैतिज तल पर दो बिन्दु O तथा P हैं।

इस प्रकार है, कि— $\angle AOP = 15^\circ$ तथा $\angle APB = 30^\circ$

ΔAOP में—

बहिष्कोण प्रमेय के प्रयोग से—

$$\angle AOP + \angle PAO = \angle APB$$

$$150^\circ + \angle PAO = 30^\circ$$

$$\angle PAO = 30^\circ - 15^\circ$$

$$\angle PAO = 15^\circ$$

$$\therefore \angle AOP = \angle PAO = 15^\circ$$

$\therefore \Delta AOP$, एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

तब, $AP = OP$

$$\therefore AP = 80 \text{ मी} \quad \{\because OP = 80 \text{ मी}\}$$

अब, ΔAPB में—

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{80 \text{ मी}}$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} \times 80 \text{ मी} \quad [AB = 40 \text{ मी}]$$

अतः मीनार की ऊँचाई 40 मीटर है।

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (d) 3. (a) 4. (b) 5. (c) 6. (a) 7. (b) 8. (a)
9. (a) 10. (b)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (b) 2. (b) 3. (a)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से—

$$AD = 24 \text{ मी,}$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\text{तथा } \angle B = 45^\circ$$

माना पैराग्लाइडर की ऊँचाई h है। तब,

$\triangle A Q D$ में,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DQ}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{24} \Rightarrow h = 12 \text{ मीटर}$$

अतः जमीन से पैराग्लाइडर की ऊँचाई 12 मीटर है।

2. चित्र से—

$$BC = 6 \text{ मीटर तथा } DQ(h) = 12 \text{ मीटर}$$

$$\text{तब } PD = DQ - PQ \Rightarrow PD = DQ - BC$$

$$[\because PQ = BC]$$

$$PD = 12 - 6$$

$$PD = 6 \text{ मीटर}$$

3. चित्र से—

$\triangle DPQ$ में,

$$PD = 6 \text{ मी, } \angle B = 45^\circ \text{ तब}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{PD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{BD} \Rightarrow BD = 6\sqrt{2} \text{ मीटर}$$

अतः पैराग्लाइड व डॉली के बीच की दूरी $6\sqrt{2}$ मीटर है।

4. चित्र से—

$\triangle A Q D$ में,

$$DQ = 12 \text{ मीटर, } \angle A = 30^\circ,$$

$$\text{तब } \tan 30^\circ = \frac{DQ}{AQ} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12}{AQ} \Rightarrow AQ = 12\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

इसी प्रकार,

$\triangle DPB$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow 1 = \frac{DP}{PB} \Rightarrow 1 = \frac{6}{PB} \Rightarrow PB = 6 \text{ मीटर}$$

$$\therefore QC = PB$$

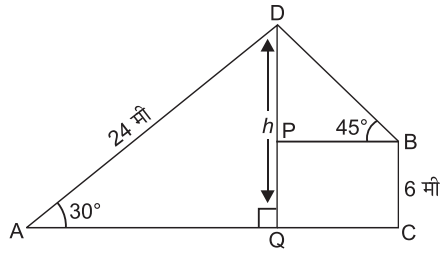
$$\therefore QC = 6 \text{ मीटर}$$

$$\text{तब } AC = AQ + QC$$

$$AC = 12\sqrt{3} + 6$$

$$AC = 6(2\sqrt{3} + 1) \text{ मीटर}$$

अतः संदीप और इमारत के आधार के बीच की दूरी $6(2\sqrt{3} + 1)$ मीटर होगी।



कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (a) 2. (c) 3. (a) 4. (b)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(i)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(i)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. माना झील के तल से h मी ऊँचाई पर एक बिन्दु C है, जिसका बादल के साथ उन्नयन कोण α तथा झील में उसके प्रतिबिम्ब के साथ β है। तब,

ΔPCE में,

$$\tan \alpha = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PE}{CE}$$

$$\tan \alpha = \frac{d-h}{x}$$

...(1)

इसी प्रकार,

ΔCDF में,

$$\tan \beta = \frac{CD}{DF} \Rightarrow \tan \beta = \frac{h+d}{x}$$

$$\tan \beta = \frac{h+d}{x}$$

...(2)

समी (2) में से (1), को घटाने पर,

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{h+d}{x} - \frac{d-h}{x}$$

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{h+d-d+h}{x}$$

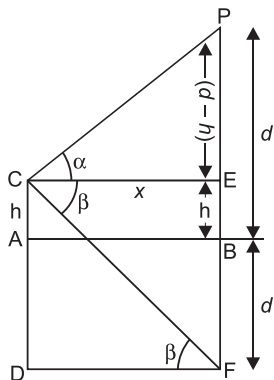
$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{2h}{x}$$

...(3)

फिर से, ΔPEC में,

$$\cos \alpha = \frac{x}{PC} \Rightarrow x = PC \cos \alpha$$

...(4)



समी (3) व (4) से

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{2h}{pc \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow pc = \frac{2h \cdot \sec \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

अतः झील से h मीटर ऊँचाई पर स्थित स्थान से बादल की दूरी $\frac{2h \cdot \sec \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$ होगी।

2. माना AB एक झुकी हुई मीनार है, C तथा D , मीनार के पाद से क्रमशः ' a ' तथा ' b ' दूरी पर स्थित दो बिन्दु हैं।

माना $AE = x$ तथा $BE = h$

अब $\triangle AEB$ में,

$$\tan \theta = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \tan \theta = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x = h \cot \theta \quad \dots(1)$$

अब $\triangle CEB$ में,

$$\tan \alpha = \frac{BE}{CE}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{a+x} \Rightarrow a+x = h \cot \alpha$$

$$\Rightarrow x = h \cot \alpha - a \quad \dots(2)$$

अब, $\triangle DEB$ में,

$$\tan \beta = \frac{BE}{DE}$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{h}{b+x} \Rightarrow b+x = h \cot \beta$$

$$\Rightarrow x = h \cot \beta - b \quad \dots(3)$$

समी (1) व (2) से ' x ' का मान बराबर रखने पर,

$$h \cdot \cot \theta = h \cot \alpha - a$$

$$h (\cot \alpha - \cot \theta) = a$$

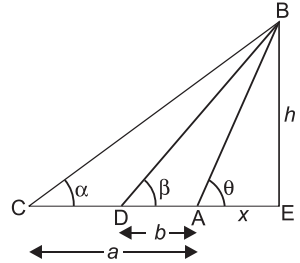
$$\Rightarrow h = \frac{a}{\cot \alpha - \cot \theta} \quad \dots(4)$$

समी (1) व (3) से x का मान बराबर रखने पर,

$$h \cot \theta = h \cot \beta - b$$

$$h (\cot \beta - \cot \theta) = b$$

$$\Rightarrow h = \frac{b}{\cot \beta - \cot \theta} \quad \dots(5)$$



समी (4) व (5) से 'h' का मान बराबर रखने पर,

$$\frac{a}{\cot \alpha - \cot \theta} = \frac{b}{\cot \beta - \cot \theta}$$

$$a (\cot \beta - \cot \theta) = b (\cot \alpha - \cot \theta)$$

$$(b - a) \cot \theta = b \cot \alpha - a \cot \beta$$

$$\Rightarrow \cot \theta = \frac{b \cot \alpha - a \cot \beta}{(b - a)}$$

इति सिद्धम्

3. माना सड़क पर कोई स्थान 'O' है, जिसकी ओर वायुयान उड़ रहा है, वायुयान की दो स्थितियाँ A और B हैं।

माना वायुयान की ऊँचाई $AP = BQ = h$ मी

प्रश्नानुसार $\angle AOP = 30^\circ$ और $\angle BOQ = 60^\circ$

अब, $AB =$ वायुयान द्वारा 12 सेकण्ड में चली

$$\text{गयी दूरी} = \left(600 \times \frac{1000}{60 \times 60} \right) \times 12$$

$$AB = 600 \times \frac{5}{18} \times 12 = 2000 \text{ मीटर}$$

माना $OQ = x$ मी

तब $\triangle BOQ$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{BQ}{OQ} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

...(1)

$\triangle AOP$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AP}{OP}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 2000} \Rightarrow h\sqrt{3} = x + 2000$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} = \frac{h}{\sqrt{3}} + 2000$$

($\because$ समी (1) से)

$$\Rightarrow 3h = h + 2000\sqrt{3}$$

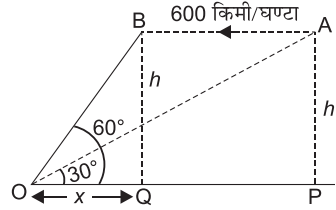
$$\Rightarrow 2h = 2000\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 1000\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 1000 \times 1.732$$

$$h = 1732 \text{ मीटर}$$

अतः वायुयान की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 1732 मीटर है।



मूल्य आधारित प्रश्न

1. (b) माना इंडिया AB है, जिसकी ऊँचाई 42 मीटर है।
दिया है, छात्र स्मारक से 42 मीटर की दूरी पर है, तब $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$

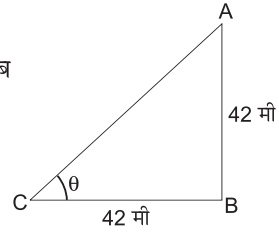
$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{42}{42} \Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\tan \theta = \tan 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

अतः छात्रों का स्मारक की चोटी से उन्नयन कोण 45° होगा।



2. (d) $\triangle PQR$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{QR}$$

$$\sqrt{3} = \frac{42}{QR}$$

$$QR = \frac{42}{\sqrt{3}} \Rightarrow QR = \frac{42}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$QR = \frac{42\sqrt{3}}{3}$$

$$QR = 42\sqrt{3}$$

$$QR = 24.24 \text{ मीटर}$$

अतः छात्र इंडिया गेट से 24.24 मीटर दूरी पर होगी।

3. (a) माना टावर की ऊँचाई h मीटर है।

तब $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः टॉवर की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $20\sqrt{3}$ मीटर है।

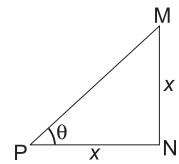
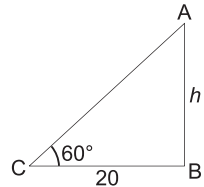
4. (b) यदि छड़ की लम्बाई व उसकी छाया का अनुपात 1 : 1 है,

तब माना छड़ की लम्बाई $= x$ मीटर

तथा छाया की लम्बाई $= x$ मीटर

$\triangle MNP$ में,

$$\tan \theta = \frac{MN}{PN} \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{x} \Rightarrow \tan \theta = 1$$

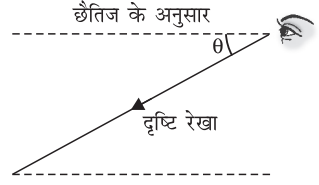


$$\tan \theta = \tan 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

अतः सूर्य का उन्नयन कोण 45° होगा।

5. (c) जब देखी जाने वाली वस्तु नीचे होती है, तब दृष्टि रेखा तथा क्षैतिज के बीच बनने वाला कोण अवनमन कोण कहलाता है।



केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (c) नंदा देवी पहाड़ी की ऊँचाई = 7816 मीटर

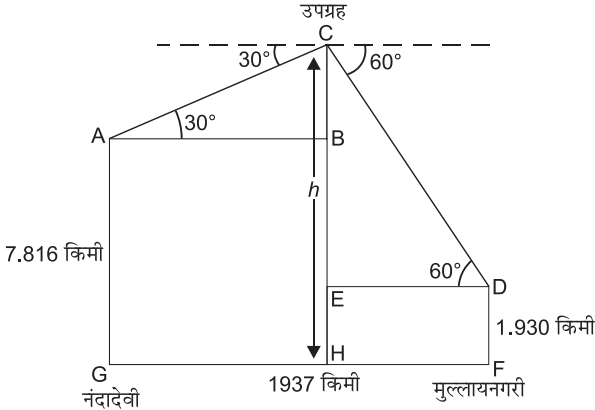
$$= 7.816 \text{ किमी}$$

मुल्लायनगरी पहाड़ी की ऊँचाई = 1930 मीटर

$$= 1.930 \text{ किमी}$$

तथा दोनों पहाड़ियों की बीच की दूरी = 1937 किमी

उपग्रह की ऊँचाई 'h' किमी है।



$$\therefore GH = HF = \frac{1}{2} \times 1937 = 968.5 \text{ किमी}$$

$$ED = HF = 968.5 \text{ किमी}$$

$$\text{यहाँ } CE = (h - 1.93)$$

$\triangle CED$ में,

$$\cos 60^\circ = \frac{ED}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{968.5}{CD}$$

$$\Rightarrow CD = 1937$$

अतः मुल्लायनगरी के शीर्ष से उपग्रह की दूरी 1937 किमी है।

2. (c) माना मील के पत्थर की दूरी मुल्लायनगरि पहाड़ से x मी है।

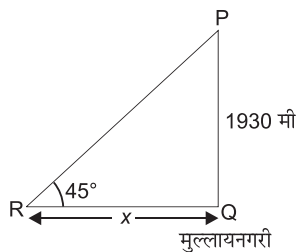
तब,

$\triangle PQR$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{QR} \Rightarrow 1 = \frac{1930}{x}$$

$$\Rightarrow x = 1930 \text{ मीटर}$$

अतः पहाड़ की पत्थर से दूरी 1930 मीटर है।



3. (b) चित्र से—

$\triangle ABC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{CB}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h - 7.816}{968.5}$$

$$\Rightarrow \frac{968.5}{\sqrt{3}} = h - 7.816 \quad [\because \sqrt{3} = 1.7]$$

$$\Rightarrow h = 569.70 + 7.816$$

$$h = 577.52 \text{ किमी}$$

अतः उपग्रह की जमीन से दूरी 577.52 किमी है।

4. (a) चित्र से—

$\triangle ABC$ में,

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{968.5}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{2 \times 968.5}{\sqrt{3}} = \frac{1937}{1.732} \quad [\because \sqrt{3} = 1.732]$$

$$AC = 1118.32$$

अतः नंदा देवी के शीर्ष से उपग्रह की दूरी 1118.32 किमी है।

5. (a) चित्र से—

व्यक्ति नंदा देवी की पहाड़ी से $QR = 7816$ मीटर दूरी पर खड़ा है।

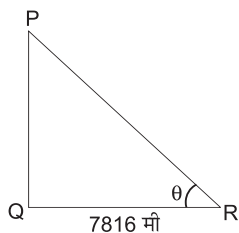
$\triangle PQR$ में,

$$\tan \theta = \frac{PQ}{QR}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{7816}{7816} = 1$$

$$\tan \theta = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

अतः व्यक्ति का नंदा देवी की चोटी से उन्नयन को 45° है।



प्रश्नावली 10 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक वृत्त की असंख्य स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
2. जिस बिन्दु पर कोई रेखा वृत्त को स्पर्श करती हैं, उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं।
3. दिया है,

वृत्त की त्रिज्या $= r = 4$ सेमी

तब वृत्त का व्यास $= 2 \times r$

$$= 2 \times 4 = 8 \text{ सेमी}$$

अतः वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी 8 सेमी है।

4. दिया है, वृत्त का केन्द्र O तथा PA इसकी स्पर्श रेखा हम जानते हैं, कि वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

अतः $\angle OPA = 90^\circ$ होगा।

5. दिया है, $\angle OAB = 60^\circ$

$$OA = 6 \text{ सेमी}$$

तब $\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$$\sin 60^\circ = \frac{OB}{OA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OB}{6}$$

$$OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$$

$$OB = 3\sqrt{3}$$

अतः त्रिज्या $r = 3\sqrt{3}$

6. $AB = 4$ सेमी

वृत्त की त्रिज्या $r = 3$ सेमी

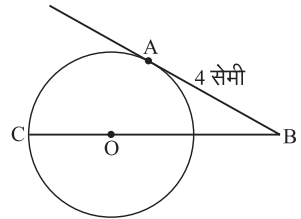
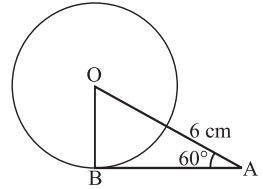
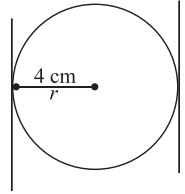
तब $OA = 3$ सेमी = त्रिज्या = OC

$$(OB)^2 = (AO)^2 + (AB)^2$$

$$OB = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$OB = 5 \text{ सेमी}$$



$$OC = 3 \text{ तथा } OB = 5 \text{ सेमी}$$

तब $BC = OC + OB$

$$BC = 3 + 5 = 8 \text{ सेमी}$$

7. $\therefore \angle OPA = 90^\circ$ {चित्र में}

अब, $\triangle OPA$ में—

$$\angle AOP + \angle OAP + \angle OPA = 180^\circ$$

$$\{\therefore \text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग} = 180^\circ\}$$

$$\angle AOP + \angle OAP + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle AOP + \angle OAP = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\therefore \angle AOP + \angle OAP = 90^\circ$$

अतः हम कह सकते हैं, कि $\angle AOP$ तथा $\angle OAP$ कोटिपूरक कोणों का युग्म है।

8. दिया है, वृत्त की त्रिज्या $= OP$

तथा वृत्त की छेदक रेखा जो बिन्दु P पर वृत्त को प्रतिच्छेद करती है। $= LM$

बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा $= PT$

$$\therefore OP \perp PT$$

तब, $\angle OPT = 90^\circ$

$$\angle OPM + \angle MPT = 90^\circ$$

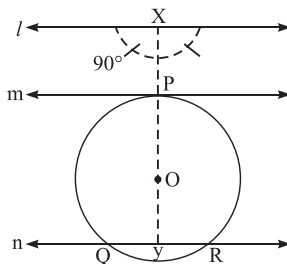
$$\{\therefore \angle OPT = \angle OPM + \angle MPT\}$$

$$\angle OPM + 50^\circ = 90^\circ \quad \{\therefore \angle MPT = 50^\circ\}$$

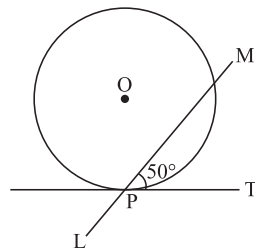
$$\angle OPM = 90^\circ - 50^\circ$$

$$\therefore \angle OPM = 40^\circ$$

9. दी गई रेखा l के समांतर दो रेखाएँ m और n खींचिए। अब रेखाओं l, m और n से एक लंब xy खींचिए।



रेखाखंड xy पर एक बिन्दु O तथा रेखा m पर बिन्दु P लीजिए। O केन्द्र तथा OP को त्रिज्या लेकर वृत्त खींचिए जो n को Q तथा R पर प्रतिच्छेद करें। स प्रकार स्पर्श रेखा तथा n छेदक रेखा होगी।



अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, TPT' वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा है, तब हम जानते हैं—
वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है

अतः $\angle OPT' = 90^\circ$

तथा दिया है, $\angle QPT' = 65^\circ$

$$\angle OPQ = \angle OPT' - \angle QPT' = 90 - 65$$

$$\angle OPQ = 25^\circ$$

$\therefore OP = OQ =$ वृत्त की त्रिज्याएँ

$$\angle OPQ = \angle OQP = 25^\circ \quad (\text{सम्मुख कोण})$$

$\triangle ODP$ में—

$$\angle OQP + \angle OPQ + \angle POQ = 180^\circ \quad (\triangle \text{ के कोणों का योग})$$

$$\Rightarrow 25^\circ + 25^\circ + \angle POQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 50^\circ + \angle POQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POQ = 180^\circ - 50^\circ$$

$$\therefore \angle POQ = 130^\circ$$

2. $\triangle PRO$ से—

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$OP^2 = PR^2 + RO^2$$

$$5^2 = 4^2 + (RO)^2$$

$$(RO)^2 = 25 - 16$$

$$RO = \sqrt{9}$$

$$RO = 3$$

$\triangle PRT$ में—

$$TP^2 = (4)^2 + (RT)^2$$

$$x^2 = 16 + RT^2$$

$$RT^2 = x^2 - 16$$

$\triangle PTO$ में

$$OT^2 = PT^2 + OP^2$$

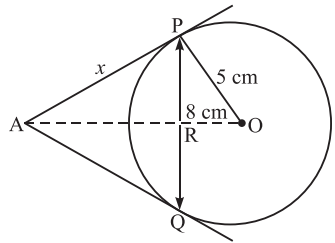
$$(TR + OR)^2 = x^2 + 5^2$$

$$TR^2 + OR^2 + 2TR \cdot OR = x^2 + 25$$

$$x^2 - 16 + 9 + 6TR = x^2 + 25 - 7 + 6TR = 25$$

$$6TR = 25 + 7 = 32$$

$$TR = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$



$$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow \frac{256}{9} + \frac{16}{1}$$

$$TP^2 = \frac{256+144}{9} = \frac{400}{9}$$

$$TP = \frac{20}{3}$$

3. दिया है, $OB = 5$ सेमी

तथा $OD = OC = 3$ सेमी

$\triangle CBO$ में पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (BC)^2$$

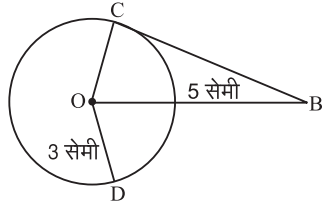
$$(5)^2 = (3)^2 + (BC)^2$$

$$25 = 9 + (BC)^2$$

$$25 - 9 = (BC)^2$$

$$BC = \sqrt{16}$$

$$BC = 4 \text{ सेमी}$$



4. $\triangle PQO$ में पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$(QO)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2$$

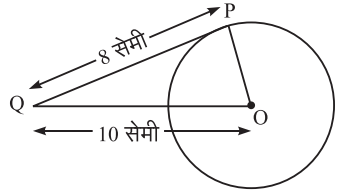
$$(10)^2 = (OP)^2 + (8)^2$$

$$100 - 64 = (OP)^2$$

$$36 = (OP)^2$$

$$OP = \sqrt{36}$$

$$OP = 6 \text{ सेमी}$$



5. पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2$$

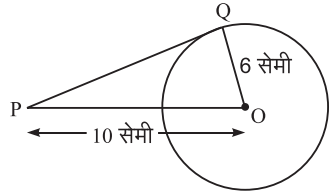
$$(10)^2 = (6)^2 + (PQ)^2$$

$$100 - 36 = (PQ)^2$$

$$64 = (PQ)^2$$

$$PQ = \sqrt{64}$$

$$PQ = 8 \text{ सेमी}$$



6. $\triangle POQ$ में

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2$$

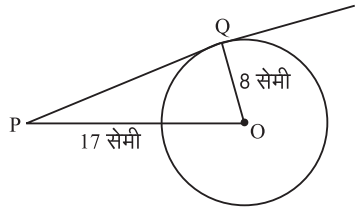
$$(17)^2 = (8)^2 + (PQ)^2$$

$$(PQ)^2 = (17)^2 - (8)^2$$

$$(PQ)^2 = 289 - 64$$

$$PQ = \sqrt{225}$$

$$PQ = 15 \text{ सेमी}$$



7. दिया है, वृत्त का केन्द्र = O

वृत्त की स्पर्श रेखाएँ = PA तथा PB

तथा $\angle APB = 35^\circ$

$\therefore$ PA तथा PB, वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore OB \perp PB$ तथा $OA \perp PA$

तब, $\angle PBO = \angle PAO = 90^\circ$

अब, चतुर्भुज POAB में—

$\therefore$ चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 360°

$\therefore \angle P + \angle A + \angle B + \angle O = 360^\circ$

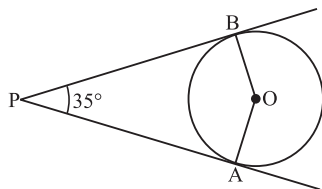
$$35^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle O = 360^\circ$$

$$215^\circ + \angle O = 360^\circ$$

$$\angle O = 360^\circ - 215^\circ$$

$$\angle O = 145^\circ$$

अतः $\angle AOB$ की माप 145° है।



8. दिया है, वृत्त का केन्द्र = O

वृत्त की स्पर्श रेखाएँ = AB तथा AC, $\angle BOC = 110^\circ$

तथा, वृत्त की त्रिज्याएँ = OB तथा OC

$\therefore$ AB तथा AC, वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore OB \perp AB$ तथा $OC \perp AC$

तब, $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$

अब, चतुर्भुज ABOC में—

$\therefore$ चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 360°

$\therefore \angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360^\circ$

$$\angle A + 90^\circ + 110^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\angle A + 290^\circ = 360^\circ$$

$$\angle A = 360^\circ - 290^\circ$$

$$\angle A = 70^\circ$$

$\therefore OB = OC$ तथा $AB = AC$

$\therefore \angle OAB = \angle OAC$

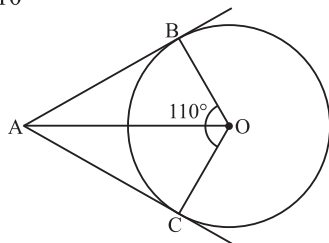
$$\angle A = \angle OAB + \angle OAC$$

$$70^\circ = \angle OAB + \angle OAB$$

$$70^\circ = 2 \cdot \angle OAB$$

$$\therefore \angle OAB = \frac{70^\circ}{2} \Rightarrow 35^\circ$$

अतः $\angle OAB$ की माप 35° है।



{ $\because \angle BOC = 110^\circ$ }

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया हुआ है, AB और CD सामान्य स्पर्श रेखा है दो वृत्त की जिनकी त्रिज्या बराबर नहीं है।

निर्माण— AB और CD को बढ़ाए ताकि तो P पर काट सकें

$$PA = PC \quad [\because \text{वृत्त के बाहरी बिंदु से बने स्पर्श रेखायें बराबर हैं}]$$

$$\text{और} \quad PB = PD$$

$$\therefore PA - PB = PC - PD$$

$$\Rightarrow AB = CD$$

2. दिया है, $\triangle ABC$ का अन्तः वृत्त त्रिभुज की भुजाओं BC, CA तथा AB को क्रमशः बिन्दुओं D, E एवं F स्पर्श करता है।

$\triangle AFO$ तथा $\triangle AEO$ में—

$$OF = OE$$

{वृत्त की त्रिज्याएँ}

$$AO = OA$$

{उभयनिष्ठ}

$$\angle AFO = \angle AEO$$

{प्रत्येक 90° }

$$\therefore \triangle AFO \cong \triangle AEO$$

तब,

$$AF = AE$$

...(1)

इसी प्रकार,

$$BD = BF$$

...(2)

तथा

$$CE = CD$$

...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर—

$$[AF + BD + CE = AE + BF + CD]$$

सिद्ध हुआ।

3. दिया है, वृत्त का केन्द्र O

बिन्दु P से खींची गई वृत्त की स्पर्श रेखाएँ $= PA$ तथा PB

वृत्त की त्रिज्याएँ $= OA$ तथा OB

$$\therefore OA \perp PA$$

$$\text{तथा} \quad OB \perp PB$$

बिन्दु P तथा वृत्त के केन्द्र O को मिलाने वाली रेखा $= PO$

अब, $\triangle PAO$ तथा $\triangle PBO$ में—

$$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$

{ $\because OA \perp PA$ तथा $OB \perp PB$ }

$$PO = OP$$

{उभयनिष्ठ}

$$AO = BO$$

{वृत्त की त्रिज्याएँ}

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$$

{SAS सर्वासमता से}

तब,

$$[\angle POA = \angle POB]$$

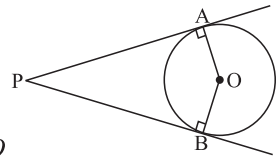
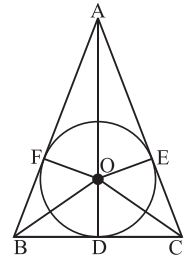
सिद्ध हुआ।

4. दिया है, वृत्त का केन्द्र O वृत्त की स्पर्श रेखाएँ $= BC$ तथा BD व $\angle DBC = 120^\circ$

वृत्त की त्रिज्याएँ $= OC$ तथा OD

$$\therefore OC \perp BC$$

$$\text{तथा} \quad OD \perp BD$$



बिन्दु B तथा वृत्त के केन्द्र O को मिलाने वाली रेखा $= BO$

सिद्ध करना है— $BO = 2 \cdot BC$

अब, $\triangle BOC$ तथा $\triangle BOD$ में—

$$\angle OCB = \angle ODB = 90^\circ$$

$$\{\because OA \perp PA \text{ तथा } OB \perp PB\}$$

$$BO = OB$$

{उभयनिष्ठ}

$$OC = OD$$

{वृत्त की त्रिज्याएँ}

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle BOD$$

$$\text{तब, } \angle DBO = \angle OBC$$

$$\therefore \angle DBC = 120^\circ$$

{दिया है}

$$\therefore \angle DBO + \angle OBC = 120^\circ$$

$$\angle OBC + \angle OBC = 120^\circ$$

$$2 \cdot \angle OBC = 120^\circ$$

$$\angle OBC = \frac{120^\circ}{2} \Rightarrow 60^\circ$$

अब, $\triangle OBC$ में—

$$\cos B = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{BC}{BO}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{BO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{BO}$$

$$\therefore [BO = 2 \cdot BC]$$

5. ज्ञात है : O केन्द्र वाले एक वृत्त का व्यास AOB है।

A तथा B पर स्पर्श रेखाएँ PAQ तथा RBS खींची गई हैं।

सिद्ध करना है : $PAQ \parallel RBS$

उपपत्ति : स्पर्श बिन्दु से खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ \text{ तथा } \angle OBS = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OBS \text{ (परन्तु ये तिर्यक रेखा के विपरीत ओर बने एकान्तर कोण हैं)}$$

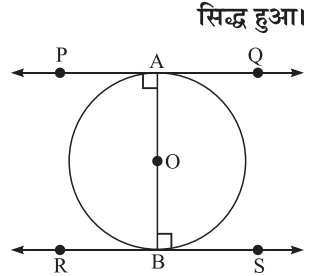
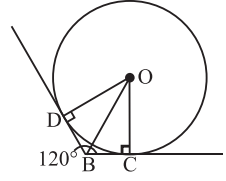
$$\therefore PQ \parallel RS$$

इति सिद्धम्।

अतः किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।

6. माना हम केन्द्र O वाले वृत्त पर विचार करें। माना कि AB एक स्पर्श रेखा है जो वृत्त को P पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है— AB पर P पर लम्बवत रेखा O केन्द्र से होकर जाती है।



उपपत्ति—माना AB पर P पर लम्ब, P से न होकर O' से होकर जाता है। OP तथा $O'P$ को मिलाया।

$\therefore AB$ पर P पर लम्ब O' से होकर गुजरता है।

$$\therefore \angle O'OB = 90^\circ \quad \dots(1)$$

O वृत्त का केन्द्र है व P संपर्क बिन्दु है। हम जानते हैं कि केन्द्र को मिलाने वाली रेखा और वृत्त की स्पर्श-रेखा, संपर्क बिन्दु पर एक दूसरे के लम्बवत होते हैं।

$$\therefore \angle OOB = 90^\circ \quad \dots(2)$$

समी (1) व (2) की तुलना करने पर,

$$\angle O'PB = \angle OPB \quad \dots(3)$$

चित्र से यह देखा जा सकता है।

$$\angle O'PB = \angle OPB \quad \dots(4)$$

$$\therefore \angle O'PB = \angle OPB \text{ संभव नहीं है।}$$

अतः AB पर P से होकर जाने वाला लम्ब, O केन्द्र से होकर जाता है।

$$7. OA = \text{त्रिज्या (बाहरी वृत्त)} = 5 \text{ सेमी}$$

$$AB = BC = 4 \text{ सेमी}$$

$$(OA)^2 = (AB)^2 + (OB)^2$$

$$(5)^2 = (4)^2 + (OB)^2$$

$$(OB)^2 = 25 - 16$$

$$(OB)^2 = 9$$

$$OB = \sqrt{9}$$

$$OB = 3 \text{ सेमी}$$

अतः आन्तरिक वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है।

$$8. \text{ दिया है, } AO = R = 5 \text{ सेमी}$$

$$OC = r = 3 \text{ सेमी}$$

ΔOAC में

$$(AO)^2 = (OC)^2 + (AC)^2$$

$$(5)^2 = (3)^2 + (AC)^2$$

$$25 = 9 + (AC)^2$$

$$25 - 9 = (AC)^2$$

$$(AC)^2 = 16$$

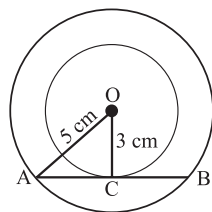
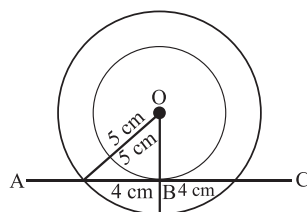
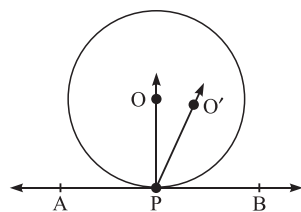
$$AC = \sqrt{16}$$

$$AC = 4 \text{ सेमी}$$

$$AC = CB = 4 \text{ सेमी}$$

$$AB = 4 + 4 + 8 \text{ सेमी}$$

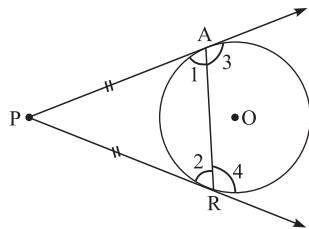
अतः बड़े वृत्त की जीवा की लम्बाई = 8 सेमी



9. $\angle 1 = \angle 2$... (i)
 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$... (ii)
 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$... (iii)

(ii) व (iii) से

$$\begin{aligned}\angle 1 + \angle 3 &= \angle 2 + \angle 4 \\ \angle 2 + \angle 3 &= \angle 2 + \angle 4 \quad [\because \angle 1 = \angle 2] \\ \angle 3 &= \angle 4\end{aligned}$$



10. अगर O वृत्त का केन्द्र है, तथा RP और QP स्पर्श रेखा है।

OR तथा OQ वृत्त को 90° स्पर्श कर रहा है।

RP तथा QP प्रतिच्छेद कर रहा है।

सिद्ध करना है $\angle QPO = \angle RPO$

$\triangle OQP$ और $\triangle ORP$

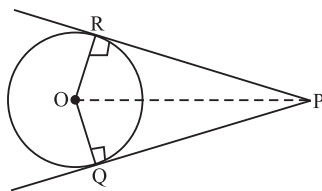
$$\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$$

$$OQ = OR = \text{त्रिज्या}$$

$$\Rightarrow OP = OP$$

$$\triangle OQP \cong \triangle ORP$$

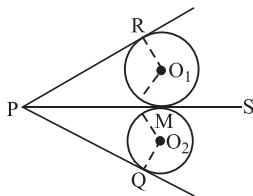
$\therefore OP$ समद्विभाजक है।



(उभयनिष्ठ)

(R.H.S. सर्वांगसमता से)

11. चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है, वृत्त O_1, O_2 से $O_1R \perp PR$



इसी प्रकार $O_2Q \perp PQ$ पर

$$\Rightarrow \angle O_1RP = \angle O_2QP = \angle O_1MP = \angle O_2MP = 90^\circ$$

$$O_1R = O_1M = O_2M = O_2Q \quad (\text{वृत्तों की त्रिज्या})$$

$$PM = PM \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle O_1RP = \angle O_1MP = \angle O_2MP = \angle O_2QP \quad (\text{प्रमेय } 90^\circ)$$

$$\triangle O_1RP \cong \triangle O_1MP \text{ तथा } \triangle O_2MP \cong \triangle O_2QP \quad (\text{R.H.S. सर्वांगसमता द्वारा})$$

$$PR = PQ \quad (\text{CPCT में})$$

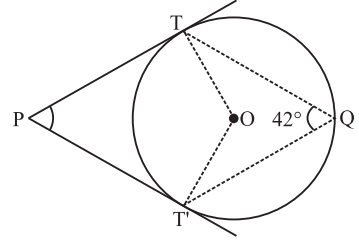
12. दिया है, वृत्त TQT' का केन्द्र = O

बाह्य बिन्दु P से वृत्त TQT' पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ = PT तथा PT'

$$\text{तथा } \angle TQT' = 42^\circ$$

$\therefore$ एक त्रिज्याखण्ड द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना कोण वृत्त की परिधि पर बने कोण का दो गुना होता है।

$\therefore \angle TOT' = 2 \times \angle TQT' = 2 \times 42^\circ$
 $\angle TOT' = 84^\circ$
 $\therefore PT$ तथा PT' वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं—
 $\therefore OT \perp PT$
 तथा $OT' \perp PT'$
 तब, $\angle PTO = \angle PT'O = 90^\circ$
 तब, चतुर्भुज $PTOT'$ में—
 $\therefore$ चतुर्भुज के चारों कोणों का योग $= 360^\circ$



$$\begin{aligned}
 \angle P + \angle O + \angle T + \angle T' &= 360^\circ \\
 \angle P + 84^\circ + 90^\circ + 90^\circ &= 360^\circ \\
 \angle P + 264^\circ &= 360^\circ \\
 \angle P &= 360^\circ - 264^\circ \\
 \angle P &= 96^\circ
 \end{aligned}$$

अतः

$$[\angle TPT' = 96^\circ]$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है, जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है : $AB + CD = AD + BC$

उपपत्ति : $\therefore AB$ तथा AD वृत्त को P तथा S पर स्पर्श करती हैं।

$$\therefore AP = AS \quad \dots(1)$$

पुनः AB तथा BC वृत्त को P तथा Q पर स्पर्श करती हैं।

$$\therefore PB = BQ \quad \dots(2)$$

$\therefore BC$ तथा CD वृत्त को Q तथा R पर स्पर्श करती हैं।

$$\therefore CR = QC \quad \dots(3)$$

और CD तथा DA वृत्त को R तथा S पर स्पर्श करती हैं।

$$\therefore DR = SD \quad \dots(4)$$

[$\therefore$ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं।]

समीकरण (1), (2), (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$AP + PB + CR + DR = AS + BQ + QC + SD$$

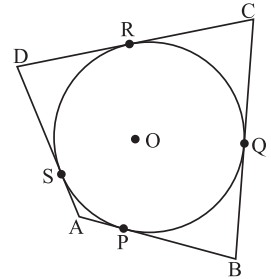
$$(AP + PB) + (CR + DR) = (AS + SD) + (BQ + QC)$$

$$\text{अतः } AB + CD = AD + BC$$

इति सिद्धम्

2. दिया गया है, AB वृत्त का व्यास है।

बिन्दु A से एक स्पर्शरेखा खींची जाती है।



स्पर्शरेखा MAN के समांतर एक जीवा CD खींचिए।

अतः CD वृत्त की जीवा है और OA वृत्त की त्रिज्या है।

$$\angle MAO = 90^\circ$$

[वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है]

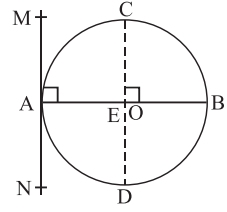
$$\angle CEO = \angle MAO \quad \dots (\text{संगत कोण})$$

$$\therefore \angle CEO = 90^\circ$$

इस प्रकार, OE, CD को समद्विभाजित करता है

[वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

इसी प्रकार, व्यास AB सभी को समद्विभाजित करता है।



3. $PQ \parallel L$

$$\angle OSP = \angle OSQ = 90^\circ$$

$\triangle OSP$ और $\triangle OSQ$ में

$$OP = OQ$$

(त्रिज्या)

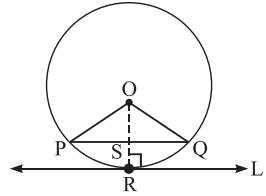
$$OS = OS$$

(उभयनिष्ठ)

$$\angle OSP = \angle OSQ$$

$$\triangle OPS \cong \triangle OQS$$

$$\angle POS = \angle QOS$$



अतः यह सिद्ध हुआ कि बिन्दु R चाप PRQ को समद्विभाजित करता है।

4. सिद्ध करना है— $AP = AQ$

रचना— OA, OP तथा OQ को मिलाया।

उपपत्ति—चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

$$\therefore OP \perp AP$$

$$\text{इसी प्रकार } OQ \perp AQ$$

$$\Rightarrow \angle OPA = \angle OQA = 90^\circ \quad \dots (1)$$

प्रथम स्थिति— $\triangle OPA$ तथा $\triangle OQA$ में,

$$OP = OQ$$

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$$OA = OA$$

(उभयनिष्ठ)

$$\angle OPA = \angle OQA$$

(प्रत्येक 90°)

$$\therefore \triangle OPA \cong \triangle OQA$$

(RHS सर्वांगसमता द्वारा)

$$AP = AQ$$

(CPCT से)

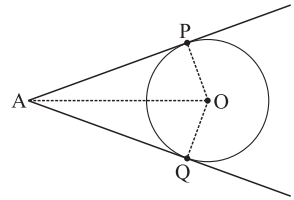
द्वितीय विधि—समकोण $\triangle OPA$ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OP^2 + AP^2$$

$$\Rightarrow AP^2 = OA^2 - OP^2$$

$$\Rightarrow AP^2 = OA^2 - OQ^2 \quad [\because OP = OQ]$$

$$\dots (2)$$



अब, समकोण ΔOQA में,

$$OA^2 = OQ^2 + AQ^2$$

$$\Rightarrow AQ^2 = OA^2 - OQ^2 \quad \dots(3)$$

समीकरण (2) व (3) से,

$$AP^2 = AQ^2$$

$$\Rightarrow [AP = AQ]$$

इति सिद्धम्।

सिद्ध करना है—

$$(i) \angle AOP = \angle AOQ$$

$$(ii) \angle OAP = \angle OAQ$$

रचना— OA, OP तथा OQ को मिलाया।

उपपत्ति— ΔOPA और ΔOQA में,

$$AP = AQ$$

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$$OA = OA$$

(उभयनिष्ठ भुजा)

$$AP = AQ$$

($\therefore$ बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान लम्बाई की होती हैं)

$$\therefore \Delta OPA \cong \Delta OQA$$

(SSS सर्वांगसमता से)

$$\therefore (i) \angle AOP = \angle AOQ$$

(CPCT से)

$$\text{तथा } (ii) \angle OAP = \angle OAQ$$

इति सिद्धम्।

5. माना, वृत्त का केन्द्र = O

बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं PA

तथा PB वृत्त की त्रिज्याएँ A तथा OB

$$\therefore OA \perp PA \text{ तथा } OB \perp PB$$

$$\text{तब, } \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$

तथा बाह्य बिन्दु P व वृत्त के केन्द्र O को मिलाने वाली रेखा PO

अब, ΔPAO तथा ΔPBO में—

$$PO = PO$$

{उभयनिष्ठ}

$$OA = OB$$

{वृत्त की त्रिज्याएँ}

$$\text{तथा } \angle PAO = \angle PBO$$

{प्रत्येक 90° }

$$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$$

{SAS सर्वांगसमता से}

$$\text{तब, } [PA = PB]$$

$$\text{तथा, } \angle APO = \angle BPO$$

$$\therefore \angle APB = \angle APO + \angle BPO$$

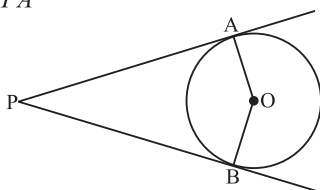
$$= \angle APO + \angle APO = 2 \cdot \angle APO$$

$$\left[\frac{1}{2} \times \angle APB = \angle APO \right]$$

तथा

$$[PA = PB]$$

सिद्ध हुआ।



अतः वृत्त के बाहर किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर बराबर होती हैं तथा उस बिन्दु और वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखाखण्ड, स्पर्श रेखाओं के बीच बने कोण की अर्द्धित करता है।

6. माना, वृत्त का केन्द्र = O

बाह्य बिन्दु P से खींची गई वृत्त की स्पर्श रेखाएँ = PA तथा PB

$\therefore$ दोनों स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं।

$\therefore PA \perp PB$

तब, $\angle APB = 90^\circ$

$\therefore PA$ तथा PB , वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

व AO तथा BO वृत्त की त्रिजाएँ हैं।

$\therefore OA \perp PA$ तथा $OB \perp PB$

तब, $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$

अब, चतुर्भुज $PAOB$ में—

$\therefore$ चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 360°

$\therefore \angle P + \angle A + \angle O + \angle B = 360^\circ$

$$90^\circ + 90^\circ + \angle O + 90^\circ = 360^\circ$$

$$270^\circ + \angle O = 360^\circ$$

$$\angle O = 360^\circ - 270^\circ$$

$$\angle O = 90^\circ$$

$\therefore \angle P = \angle O = \angle A = \angle B = 90^\circ$

सिद्ध हुआ

$\therefore$ चतुर्भुज $PAOB$ एक वर्ग है।

अतः किसी वृत्त पर बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा यदि परस्पर लम्ब हों, तो स्पर्श रेखाओं और उनकी संलग्न त्रिज्याओं से मिलकर बना चतुर्भुज एक वर्ग है।

7. दिया है, दो सकेन्द्रीय वृत्तों का केन्द्र = O

बड़े वृत्त की त्रिज्या (OQ) = 15 सेमी तथा छोटी वृत्त की त्रिज्या (OR) = 8 सेमी

बाह्य बिन्दु P से बड़े वृत्त की स्पर्श रेखा (PQ) = 8 सेमी

तथा बाह्य बिन्दु P से ही छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा = PR = ?

$\therefore PQ$ तथा PR स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore OR \perp PR$ तथा $OQ \perp PQ$

तब, $\angle PRO = \angle PQO = 90^\circ$

बाह्य बिन्दु P तथा दोनों वृत्तों के केन्द्र O को मिलाने वाली रेखा = PO

अब, $\triangle POQ$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$PO^2 = OQ^2 + PQ^2$$

$$PO^2 = (15 \text{ सेमी})^2 + (8 \text{ सेमी})^2$$

$$= 225 \text{ सेमी}^2 + 64 \text{ सेमी}^2 = 289 \text{ सेमी}^2$$

$$\therefore PO = \sqrt{289} \text{ सेमी} = 17 \text{ सेमी}$$

तथा $\triangle POR$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$PO^2 = OR^2 + PR^2$$

$$(17 \text{ सेमी})^2 = (8 \text{ सेमी})^2 + PR^2$$

$$289 \text{ सेमी}^2 = 64 \text{ सेमी}^2 + PR^2$$

$$289 \text{ सेमी}^2 - 64 \text{ सेमी}^2 = PR^2$$

$$225 \text{ सेमी}^2 = PR^2$$

$$\therefore PR = \sqrt{225} \text{ सेमी}$$

$$= 15 \text{ सेमी}$$

अतः PR की माप 15 सेमी है।

8. दिया है, $\triangle ABC$ का अन्तः वृत्त त्रिभुज की भुजाओं को बिन्दु P, Q तथा R पर स्पर्श करता है। जहाँ, $PA = 4$ सेमी, $PB = 6$ सेमी तथा $AC = 12$ सेमी

माना, वृत्त का केन्द्र O

तब, वृत्त की त्रिज्याएँ PO, RO तथा QO

$\therefore AB, BC$ तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore PO \perp AB, RO \perp AC$ तथा $QO \perp BC$

तब, $\angle APO = \angle BPO = 90^\circ$

$$\angle ARO = \angle CRO = 90^\circ$$

तथा $\angle BQO = \angle CQO = 90^\circ$

अब, $\triangle AOP$ तथा $\triangle AOR$ में—

$$AO = OQ$$

{उभयनिष्ठ}

$$PO = RO$$

{वृत्त की त्रिज्याएँ}

$$\angle APO = \angle ARO$$

{प्रत्येक 90° }

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle AOR$$

{SAS सर्वांगसमता से}

तब, $AP = AR$

$$\therefore AP = 4 \text{ सेमी}$$

$$\therefore AR = AP = 4 \text{ सेमी}$$

$$\text{इसी प्रकार, } PB = BQ = 6 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } RC = QC$$

$$\therefore AC = AR + RC$$

$$12 \text{ सेमी} = AR + RC \quad \{\because AC = 12 \text{ सेमी}\}$$

$$12 \text{ सेमी} = 4 \text{ सेमी} + RC \quad \{\because AR = 4 \text{ सेमी}\}$$

$$12 \text{ सेमी} - 4 \text{ सेमी} = RC$$

$$8 \text{ सेमी} = RC$$

$$\therefore QC = RC = 8 \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, } BC = BQ + QC = 6 \text{ सेमी} + 8 \text{ सेमी} = 14 \text{ सेमी}$$

अतः BC की माप 14 सेमी है।

9. मुख्य अवधारणा

$$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$$

वृत्त की स्पर्श रेखा एवं त्रिज्या आपस में लम्बवत होती है।

$$\therefore PA \perp OA \Rightarrow \angle OAP = 90^\circ$$

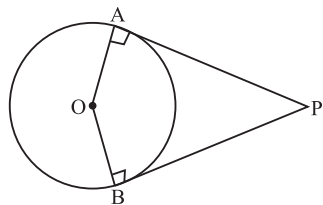
$$PB \perp OB \Rightarrow \angle OBP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OAP + \angle OBP = 180^\circ$$

$$\text{चतुर्भुज } PAOB \text{ में } \Rightarrow \angle A + \angle P + \angle B + \angle O = 360^\circ$$

$$\angle P + \angle O = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$$



10. दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज $ABCD$, जिसकी भुजाएँ वृत्त को क्रमशः P, Q, R और S बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

रचना : AC, OP और OQ को मिलाया।

उपपत्ति : चूँकि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं,

$$\therefore AP = AS, \quad BP = BQ, \quad CQ = CR \quad \text{तथा}$$

$$DR = DS$$

अब, $\triangle OAP$ और $\triangle OCQ$ में,

$$OP = OQ \quad (\text{एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।})$$

$$\angle OAP = \angle OCQ \quad (\text{समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के अर्द्धक हैं।})$$

$$\angle OPA = \angle OQC \quad (\text{प्रत्येक समकोण है।})$$

$$\therefore \text{दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। अर्थात् } \triangle OAP \cong \triangle OCQ \quad (\text{ASA से})$$

$$\Rightarrow AP = CQ \quad (\text{C.P.C.T. से})$$

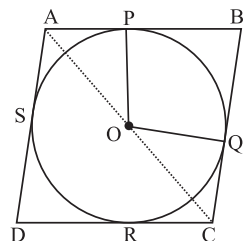
$$\Rightarrow AP + BP = CQ + BP = CQ + BQ \quad (\because BP = BQ)$$

$$\Rightarrow AB = BC$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $AD = AB$ तथा $BC = CD$

$$\therefore \text{समान्तर चतुर्भुज } ABCD \text{ में, } AB = CD = BC = AD$$

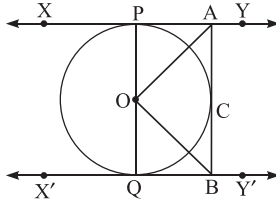
अतः $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।



11. दिया है, XY और $X'Y'$ केन्द्र O वाले वृत्त की दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं तथा स्पर्श बिन्दु C वाली एक अन्य स्पर्श रेखा AB, XY को A पर तथा $X'Y'$ को B पर प्रतिच्छेद करती है। OA और OB को मिलाने पर $\angle AOB$ प्राप्त होता है।

सिद्ध करना है— $\angle AOB = 90^\circ$

रचना— O और C को मिलाइए। इसी प्रकार स्पर्श रेखाओं XY और $X'Y'$ के स्पर्श बिन्दु P और Q को O से मिलाइए।



प्रमाण: क्योंकि XY स्पर्श रेखा है और OP एक त्रिज्या है।

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ \quad \dots(i)$$

इसी प्रकार, AB स्पर्श रेखा है और OC एक त्रिज्या है।

$$\therefore \angle OCA = 90^\circ \quad \dots(ii)$$

अब समकोण $\triangle OPA$ और समकोण $\triangle OCA$ में,

$$AP = PC \quad (\text{बाह्य बिन्दु से एक ही वृत्त की स्पर्श रेखा})$$

$$\angle OPA = \angle OCA \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$OA = OA \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

अतः $\triangle OPA \cong \triangle OCA$ (समकोण-कर्ण भुजा सर्वांगसम नियम से)

$$\Rightarrow \angle POA = \angle COA \quad \dots(iii)$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad \angle QOB = \angle COB \quad \dots(iv)$$

समी० (iii) व (iv) से—

$$\angle POA + \angle QOB = \angle COA + \angle COB = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

$$[\because POQ \text{ एक सरल रेखा है}]$$

$$\Rightarrow \angle COA + \angle COB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

12. माना, $ABCD$ उस वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज है, जिसका केन्द्र O है। तथा चतुर्भुज $ABCD$ की चारों भुजाएँ वृत्त की क्रमशः बिन्दुओं P, Q, R तथा S पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है— $[AD + BC = AB + DC]$

$\therefore$ किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

$$\therefore AS = AP \quad \dots(1)$$

$$BQ = BP \quad \dots(2)$$

$$CQ = CR \quad \dots(3)$$

$$\text{तथा} \quad DS = DR \quad \dots(4)$$

चारों समीकरणों को जोड़ने पर—

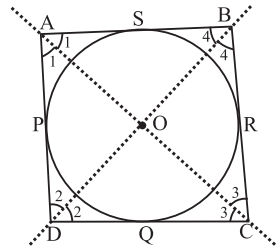
$$AS + BQ + CQ + DS = AP + BP + CR + DR$$

$$(AS + DS) + (BQ + CQ) = (AP + BP) + (CR + DR)$$

$$\therefore [AD + BC = AB + CD]$$

सिद्ध हुआ।

अतः किसी वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के योग बराबर होते हैं।



13. दिया है, $PQRS$ एक चतुर्भुज है, जिसका एक अन्तः वृत्त खींचा गया है।

माना, चतुर्भुज $PQRS$ का अन्तः वृत्त इसकी भुजाओं को बिन्दुओं A, B, C तथा D पर स्पर्श करता है।

सिद्ध करना है— $[PQ + RS = QR + SP]$

∴ किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

$$\therefore PA = PD \quad \dots(1)$$

$$AQ = BQ \quad \dots(2)$$

$$CR = RB \quad \dots(3)$$

$$\text{तथा} \quad SC = SD \quad \dots(4)$$

चारों समीकरणों की जोड़ने पर—

$$PA + AQ + CR + SC = PD + BQ + RB + SD$$

$$(PA + AQ) + (SC + CR) = (BQ + RB) + (SD + PD)$$

$$\therefore [PQ + RS = SP + QR]$$

सिद्ध हुआ।

14. दिया है, वृत्त का केन्द्र O

वृत्त का व्यास $= OP$

$$\therefore OQ = QP$$

माना, $OQ = QP = OA = OB = r$

अब, ΔAOP में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$OP^2 = OA^2 + AP^2$$

$$(2r)^2 = r^2 + AP^2$$

$$4r^2 - r^2 = AP^2$$

$$3r^2 = AP^2$$

$$\therefore AP = \sqrt{3}r$$

$$\text{इसी प्रकार, } BP = \sqrt{3}r$$

ΔAOP में—

$$\tan P = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AO}{AP} = \frac{r}{\sqrt{3}r} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \angle APO = 30^\circ$$

इसी प्रकार, $\angle OPB = 30^\circ$

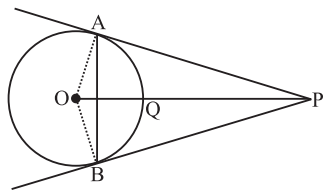
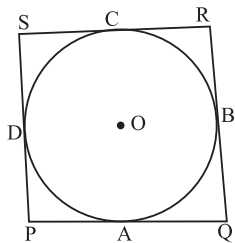
$$\text{तब, } \angle APB = \angle APO + \angle OPB = 30^\circ + 30^\circ$$

$$\angle APB = 60^\circ$$

अब, ΔAPB में—

$$\angle ABP = \angle BAP$$

$$\{\because AP = BP\}$$



$\therefore$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= 180^\circ$

$\therefore \angle ABP + \angle BAP + \angle APB = 180^\circ$

$$\angle ABP + \angle ABP + 60^\circ = 180^\circ \quad \{\because \angle ABP = \angle BAP\}$$

$$2 \cdot \angle ABP = 180^\circ - 60^\circ$$

$$2 \cdot \angle ABP = 120^\circ$$

$$\angle ABP = \frac{120^\circ}{2} \Rightarrow 60^\circ$$

$\therefore \angle ABP = \angle BAP = 60^\circ$

$\therefore$ त्रिभुज ABP के तीनों कोणों की माप 60° है।

$\therefore$ त्रिभुज ABP एक समबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध हुआ।

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

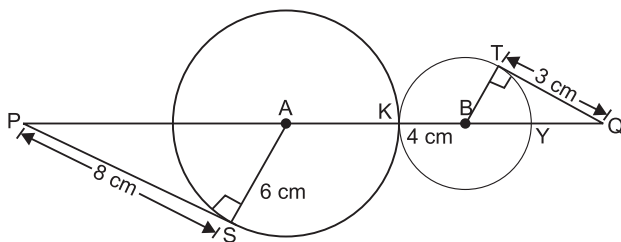
1. (b) 2. (b) 3. (a) 4. (c) 5. (a) 6. (c) 7. (a) 8. (d)
9. (a) 10. (b)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (a) 2. (c) 3. (a) 4. (d)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से—



$\triangle ASP$ में, $\angle S = 90^\circ$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(PA)^2 = (PS)^2 + (AS)^2$$

$$(PA)^2 = (8)^2 + (6)^2$$

$$\Rightarrow PA^2 = 64 + 36 = 100$$

$$PA = \sqrt{100}$$

$$PA = 10 \text{ सेमी}$$

अतः PA का मान 10 सेमी है।

2. चित्र से—

ΔBTQ में, $\angle T = 90^\circ$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(BQ)^2 = (BT)^2 + (QT)^2$$

$$(BQ)^2 = (4)^2 + (3)^2$$

$$\Rightarrow (BQ)^2 = 16 + 9$$

$$BQ^2 = 25 \Rightarrow BQ = 5 \text{ सेमी}$$

अतः BQ का मान 5 सेमी है।

3. चित्र से—

$$PK = PA + AK = 10 + 6 \quad (\because AK = 6 \text{ (त्रिज्या)})$$

$$PK = 16 \text{ सेमी}$$

अतः PK का मान 16 सेमी है।

4. चित्र से—

$$QB = QY = BY$$

$$5 = QY + 4 \quad (\because BY = 4 \text{ सेमी (त्रिज्या)})$$

$$QY = 5 - 4 = 1$$

$$QY = 1 \text{ सेमी}$$

अतः QY का मान 1 सेमी है।

5. सिद्ध करना है—

$$TQ^2 = KQ \cdot YQ$$

चित्र से,

$$TQ = 3 \text{ सेमी, } KQ = QB + KB$$

$$KQ = 5 + 4 = 9 \text{ सेमी}$$

तथा

$$YQ = 1 \text{ सेमी तब}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = TQ^2 = (3)^2 = 9$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = KQ \cdot YQ = 9 \times 1 = 9$$

$$\text{अतः} \quad TQ^2 = KQ \cdot YQ \quad \text{सिद्ध हुआ।}$$

कूट आधारित प्रश्न

1. (ii)

2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (c)

2. (c)

3. (c)

4. (d)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(iii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(d)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. चित्र में OA, OB तथा OC को मिलाया।

$\triangle ABO$ व $\triangle ACO$ में

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$BO = CO \quad (\text{समान वृत्त की त्रिज्या})$$

$$AO = AO \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO \quad (\text{SSS सर्वांगसमता से})$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \quad (\text{सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग})$$

अब, $\triangle ABM$ व $\triangle ACM$ में,

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle 1 = \angle 2 \quad (\text{ऊपर साबित हुआ})$$

$$AM = AM \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle AMC \quad (\text{SSS सर्वांगसमता से})$$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC \quad (\text{सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग})$$

साथ ही, $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$

[रैखिक युग्म]

$$\angle AMB + \angle AMB = 180^\circ$$

$$[\because \angle AMB = \angle AMC]$$

$$2\angle AMB = 180^\circ$$

$$\angle AMB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$$

हम जानते हैं, कि वृत्त के केन्द्र से एक लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है।

तो OA, BC का लम्ब समद्विभाजक है।

माना $AM = x$, फिर $OM = 9 - x$

$$[\because OA = \text{त्रिज्या} = 9 \text{ सेमी}]$$

समकोण $\triangle AMC$ में,

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

[पाइथागोरस प्रमेय से]

$$\Rightarrow MC^2 = 6^2 - x^2$$

...(1)

समकोण $\triangle OMC$ में,

$$OC^2 = OM^2 + MC^2$$

[पाइथागोरस प्रमेय से]

$$MC^2 = 9^2 - (9 - x)^2$$

...(2)

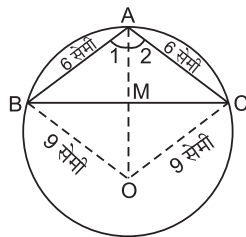
समी (1) व (2) से,

$$6^2 - x^2 = 9^2 - (9 - x)^2$$

$$36 - x^2 = 81 - (81 + x^2 - 18x)$$

$$36 = 18x \Rightarrow x = 2$$

$$\therefore AM = 2 \text{ सेमी}$$



समी (2) से,

$$MC^2 = 9^2 - (9-2)^2 = 81 - 49 = 32$$

$$MC = \sqrt{32} \Rightarrow MC = 4\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\therefore BC = 2MC = 8\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AM$$

$$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times 2 = 8\sqrt{2} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $8\sqrt{2}$ वर्ग सेमी है।

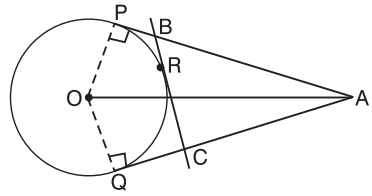
2. चित्र से—

वृत्त की त्रिज्या $= OP = OQ = 5$ सेमी

तथा $OA = 13$ सेमी

दिया गया है, AP व AQ बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

तब $AP = AQ$... (1)



[किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।]

ΔOPA में,

$$\angle OPA = 90^\circ \quad [\text{वृत्त की त्रिज्या संपर्क बिन्दु पर स्पर्श रेखा के लंबवत होती है।}]$$

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$(OA)^2 = (OP)^2 + (PA)^2$$

$$(13)^2 = (5)^2 + PA^2$$

$$169 - 25 = PA^2$$

$$\Rightarrow PA^2 = 144$$

$$PA = 12 \text{ सेमी}$$

($\because$ वर्गमूल लेने पर)

अब ΔABC का परिमाप $= AB + BC + CA$

$$= AB + BR + CR + CA \quad [\text{चित्र से—} BC = BR + CR]$$

हम जानते हैं कि किसी बाह्य बिन्दु से, वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

तब $BR = BP$ तथा $CR = CQ$

[$\because B$ व C , बाह्य बिन्दु हैं]

अब ΔABC का परिमाप $= AB + BP + CQ + CA$

[$\because BR = BP$ तथा $CR = CQ$]

$$= AP + AQ$$

$$= AP + AP$$

[समी (1) से]

$$= 2AP$$

$$= 2 \times 12 = 24 \text{ सेमी}$$

अतः ΔABC का परिमाप 24 सेमी होगा।

3. माना वृत्त की त्रिभुज की भुजाओं AB व AC को क्रमशः E व F पर स्पर्श करता है और रेखाखण्ड AF की लम्बाई x है।

$\triangle ABC$ में,

$$CD = CF = 6 \text{ सेमी}$$

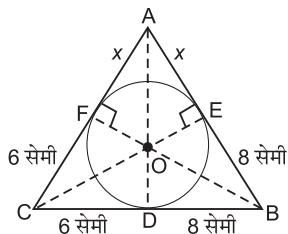
[$\therefore$ बिन्दु C से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ]

$$BE = BD = 8 \text{ सेमी}$$

[$\therefore$ बिन्दु B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ]

$$AE = AF = x \text{ सेमी}$$

[$\therefore$ बिन्दु A से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ]



अब,

$$AB = AE + EB = x + 8 = a \quad (\text{माना})$$

$$BC = BD + DC = 8 + 6 = 14 = b \quad (\text{माना})$$

$$CA = CF + FA = 6 + x = c \quad (\text{माना})$$

तब $\triangle ABC$ का अर्द्धपरिमाप

$$s = \frac{AB + BC + CA}{2} \Rightarrow s = \frac{x + 8 + 14 + 6 + x}{2}$$

$$s = \frac{28 + 2x}{2} \Rightarrow s = (14 + x)$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{(14+x)(14+x-x-8)(14+x-4)(14+x-6-x)} \\ &= \sqrt{(14+x)(6)(x)(8)} = 4\sqrt{3(14+x)^2} \end{aligned}$$

अब $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल = $\triangle OBC$ का क्षेत्रफल + $\triangle OCA$ का क्षेत्रफल + $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

$$4\sqrt{3(14+x)^2} = \frac{1}{2} \times OD \times BC + \frac{1}{2} \times OF \times AC + \frac{1}{2} \times OE \times AB$$

$$4\sqrt{3(14+x)^2} = \frac{1}{2} \times 4 \times 14 + \frac{1}{2} \times 4 \times (x+6) + \frac{1}{2} \times 4 \times (x+8)$$

$$4\sqrt{3(14+x)^2} = 28 + 12 + 2x + 16 + 2x$$

$$4\sqrt{3(14+x)^2} = 56 + 4x$$

$$\sqrt{3(14+x)^2} = 14 + x$$

वर्ग करने पर,

$$3(14+x)^2 = (14+x)^2$$

$$42x + 3x^2 = 196 + x^2 + 28x$$

$$2x^2 + 14x - 196 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 98 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 14x - 7x - 98 = 0 \Rightarrow x(x+14) - 7(x+14) = 0$$

$$\Rightarrow (x+14)(x-7)=0$$

$$x = -14 \text{ या } x = 7$$

$x = -14$ संभव नहीं है, क्योंकि भुजाओं की लंबाई ऋणात्मक नहीं होती।

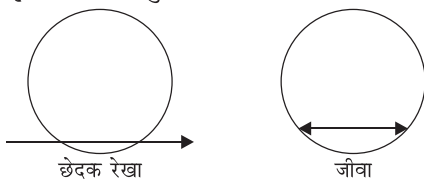
$$\therefore x = 7$$

$$\text{अब } AB = x + 8 = 7 + 8 = 15 \text{ सेमी}$$

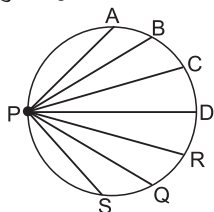
$$AC = 6 + x = 6 + 7 = 13 \text{ सेमी}$$

मूल्य आधारित प्रश्न

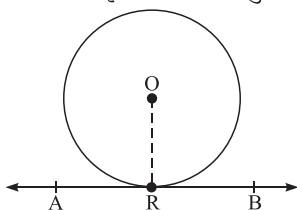
1. (d) एक रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटती है छेदक रेखा व जीवा कहलाती है।



2. (d) किसी वृत्त की परिधि पर अनंत बिन्दु होते हैं, इसलिए किसी भी वृत्त पर अनंत स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
3. (c) यदि कोई बिन्दु वृत्त के बाहर स्थित है, तो उससे वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
4. (a) वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर अनंत छेदक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



5. (d) रेखा जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर स्पर्श करती है। वृत्त की स्पर्श रेखा कहलती है। यहाँ स्पर्श रेखा AB है जो वृत्त को 'R' बिन्दु पर स्पर्श करती है।



केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (b) चित्र से—

AD, एक वृत्त की स्पर्श रेखा है, जो वृत्त को बिन्दु 'S' पर स्पर्श करती है।

हम जानते हैं, कि केन्द्र व स्पर्शी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड स्पर्श रेखा पर लंबवत होता है।

अर्थात् $OS \perp AD$
तब $\angle OSA = 90^\circ$ होगा।

2. (d) चित्र से—

हम जानते हैं, कि किसी वृत्त पर, बाह्य बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है, तब

$$AP = AS \quad [A, \text{बाह्य बिन्दु है}]$$

$$BP = BQ \quad [B, \text{बाह्य बिन्दु है}]$$

तथा $CQ = CR \quad [C, \text{बाह्य बिन्दु है}]$

3. (a) दिया है—

$$DR = 7 \text{ सेमी}$$

$$AD = 11 \text{ सेमी}$$

यहाँ, $DR = DS$ [$\because$ वृत्त पर बाह्य बिन्दु D से खींची गयी स्पर्शियों की लम्बाई है]

तब $DS = 7 \text{ सेमी}$

$$\therefore AD = DS + AS$$

$$11 = 7 + AS \quad \Rightarrow \quad AS = 11 - 7 = 4$$

$$AS = 4 \text{ सेमी}$$

बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श AS तथा AP है, तब

$$AS = AP \quad \Rightarrow \quad AP = 4 \text{ सेमी}$$

अतः AP की लम्बाई 4 सेमी होगी।

4. (b) दिया है—

$$\angle QCR = 60^\circ$$

हम जानते हैं, स्पर्श रेखाओं तथा स्पर्श बिन्दुओं को केन्द्र से मिलाने वाले रेखाखण्डों के बीच बनने वाले कोण सम्पूरक होते हैं।

तब, $\angle QCR + \angle QOR = 180^\circ$

$$60^\circ + \angle QOR = 180^\circ$$

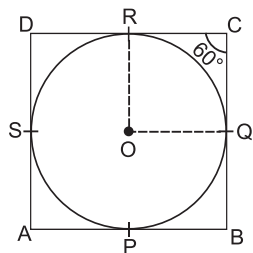
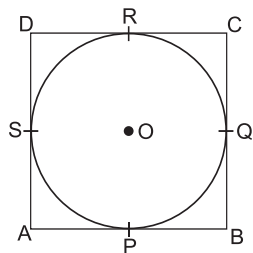
$$\angle QOR = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\angle QOR = 120^\circ$$

अतः $\angle QOR = 120^\circ$ होगा।

5. (c) यदि O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है। जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं P, Q, R व S पर स्पर्श करती है, तब विपरीत भुजाओं के योग का युग्म बराबर होता है।

अतः $AB + CD = AD + BC$

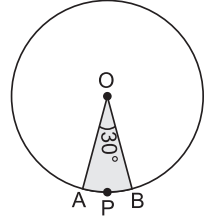


प्रश्नावली 11 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया हुआ त्रिज्यखण्ड $OAPB$ है (देखिए आकृति)।

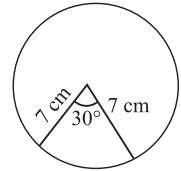
$$\begin{aligned}\text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{12.56}{3} \\ &= 4.19 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 - \text{त्रिज्यखण्ड } OAPB \text{ का क्षेत्रफल} \\ &= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ सेमी}^2 \\ &= (50.24 - 4.19) \text{ सेमी}^2 \\ &= 46.05 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

2. चाप की लम्बाई

$$\begin{aligned}l &= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \\ l &= \frac{30^\circ}{360} \times 2 \times \pi \times 7 \\ l &= \frac{1}{12} \times 2\pi \times 7 = \frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

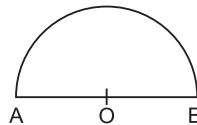


$$\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$\text{या } \frac{1}{2} lr$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times \frac{7\pi}{6} \times 7 \\ \frac{7}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{6} &\Rightarrow \frac{77}{6} = 12.83 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

3. अतः इसका नाम अर्द्धवृत्त है।



4. हम जानते हैं, कि चाप की लम्बाई $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$\begin{aligned} \text{तथा त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{2}{2} \times \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{\theta}{360} 2\pi r \times \frac{r}{2} \\ A &= \frac{1}{2} lr \end{aligned}$$

इति सिद्धम्

5. त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\frac{1}{2} \times 2r \times r$$

$$r^2$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. वृत्तखण्ड AYB का क्षेत्रफल = त्रिज्याखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल $-\Delta OAB$ का क्षेत्रफल ... (1)

अब, त्रिज्याखण्ड $OAYB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ सेमी}^2$$

$$= 462 \text{ सेमी}^2 \quad \dots (2)$$

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ खींचिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।

ध्यान दीजिए कि $OA = OB$ है।

अतः RHS सर्वांगसमता से, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ है।

इसलिए M जीवा AB का मध्य-बिन्दु है तथा

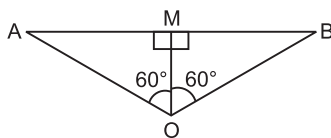
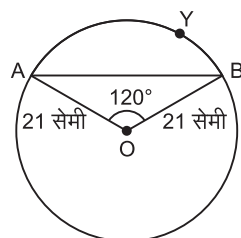
$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ \text{ है।}$$

मान लीजिए $OM = x$ सेमी है।

$$\text{इसलिए } \Delta OMA \text{ से, } \frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ \quad \text{या} \quad \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{या } x = \frac{21}{2} \quad \text{अतः } OM = \frac{21}{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{साथ ही } \frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{अतः} \quad AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ सेमी}$$



$$\text{इसलिए } AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } \triangle OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times AB \times OM \\ &= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ सेमी}^2 = \frac{441}{4} \sqrt{3} \text{ सेमी}^2 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ वृत्तखण्ड } AYB \text{ का क्षेत्रफल} = \left(462 - \frac{441}{4} \sqrt{3} \right) \text{ सेमी}^2$$

[समीकरण (1), (2) और (3) से]

$$= \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3}) \text{ सेमी}^2 = 271 \text{ सेमी}^2$$

2.

$$OP = OQ = OB$$

$$(OB)^2 = (OC)^2 + (BC)^2$$

$$(OB)^2 = (40)^2 + (40)^2$$

$$OB = \sqrt{1600 + 1600} = \sqrt{3200}$$

$$= \sqrt{8 \times 400} = 20 \times 2\sqrt{2}$$

$$OB = 40\sqrt{2}$$

$$\text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \pi r^2 - r^2$$

$$= \frac{1}{4} \pi \times (40\sqrt{2})^2 - (40)^2$$

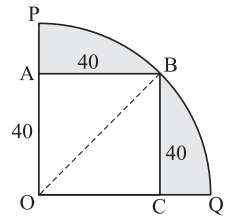
$$= \frac{1}{4} \times 3.14 \times 1600 \times 2 - 1600$$

$$= 1600 \left[\frac{3.14}{4} \times 2 - 1 \right]$$

$$= 1600 \left[\frac{3.14}{2} - 1 \right] = 1600 (1.57 - 1)$$

$$= 1600 \times 0.57$$

$$= 912 \text{ सेमी}^2$$



3. दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 10 सेमी

$$\therefore \text{ वृत्त का व्यास } (d) = 2 \times 10 \Rightarrow 20 \text{ सेमी}$$

$$\text{तब, वर्ग के विकर्ण की लम्बाई} = 20 \text{ सेमी}$$

$$\therefore AC = BD = 20 \text{ सेमी}$$

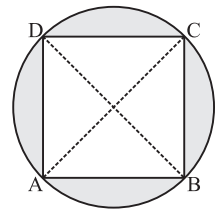
अब, $\triangle ABC$ में—

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$AB^2 + AB^2 = (20 \text{ सेमी})^2$$

$$2. AB^2 = 400 \text{ सेमी}^2$$

$$\{\because AB = BC\}$$



$$AB^2 = \frac{400}{2} \text{ सेमी}$$

$$AB^2 = 200 \text{ सेमी}^2$$

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा²

∴ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $AB^2 = 200 \text{ सेमी}^2$

$$\begin{aligned} \text{तथा वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 = 3.14 \times (10 \text{ सेमी})^2 \\ &= 3.14 \times 100 \text{ सेमी}^2 \\ &= 314 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः वर्ग को छोड़कर वृत्त के शेष भाग का क्षेत्रफल} &= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{वर्ग का क्षेत्रफल} \\ &= 314 \text{ सेमी}^2 - 200 \text{ सेमी}^2 \\ &= 114 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

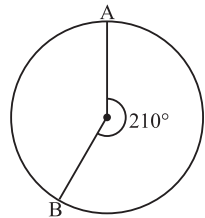
4. दिया है, घड़ी की मिनट वाली सुई की लम्बाई = 10 सेमी

9 : 00 बजे मिनट की सुई थी = 12 पर

तथा 9 : 35 बजे मिनट की सुई थी = 7 पर

∴ मिनट की सुई द्वारा तय कोण = $7 \times 30^\circ = 210^\circ$

$$\begin{aligned} \text{तब, मिनट की सुई द्वारा तय क्षेत्रफल} &= \frac{210^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{210^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (10 \text{ सेमी})^2 \\ &= \frac{7}{12} \times \frac{22}{7} \times 100 \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{1100}{6} \text{ सेमी}^2 \Rightarrow 183.33 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$



अतः मिनट वाली सुई ने घड़ी में 9 : 00 बजे से 9 : 35 बजे तक कुल 183.33 सेमी² का क्षेत्रफल तय किया।

5. दिया है, वृत्त के त्रिज्यखण्ड OAPB का क्षेत्रफल

पूरे वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{5}{18}$ भाग हैं।

$$\text{तब, } \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{5}{18}$$

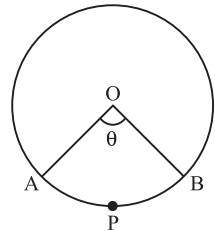
$$\Rightarrow \theta = \frac{5 \times 360^\circ}{18}$$

$$\theta = 5 \times 20^\circ \Rightarrow 100^\circ$$

अतः θ का मान 100° होगा।

6. माना, वृत्त का केन्द्र = O

तथा वृत्त की जीवा = AB

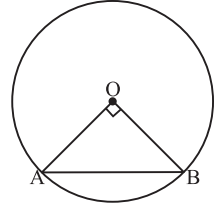


∴ वृत्त की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

∴ $OA = OB = 14$ सेमी

तथा $\angle AOB = 90^\circ$

$$\begin{aligned}\text{तब, त्रिज्यखण्ड } AOB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (14 \text{ सेमी})^2 \\ &= \frac{11}{14} \times 14 \times 14 \text{ सेमी}^2 \Rightarrow 154 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$



अतः लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 154 सेमी² है।

7. माना, वृत्त का केन्द्र = O

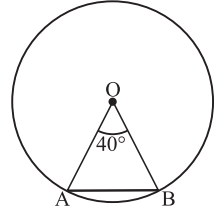
तथा वृत्त की जीवा = AB

∴ वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 सेमी

∴ $OA = OB = 7$ सेमी

तथा $\angle AOB = 45^\circ$

$$\begin{aligned}\text{तब, चाप } AB \text{ की लम्बाई } (l) &= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r \\ &= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \text{ सेमी} \\ &= \frac{1}{8} \times 44 \text{ सेमी} = 5.5 \text{ सेमी}\end{aligned}$$



∴ त्रिज्यखण्ड AOB का परिमाण = $OA + OB + AB$

$$= 7 \text{ सेमी} + 7 \text{ सेमी} + 5.5 \text{ सेमी} = 19.5 \text{ सेमी।}$$

अतः वृत्त के लघु त्रिज्यखण्ड का परिमाण 19.5 सेमी है।

8. दिया है, चित्र में—

$OA = OB = 7$ सेमी

$OC = OD = 3.5$ सेमी

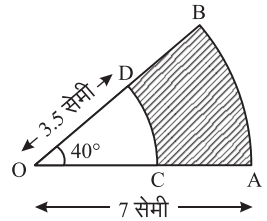
तथा $\angle AOB = 40^\circ$

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड AOB का क्षेत्रफल

– त्रिज्यखण्ड COD का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}&= \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi \cdot r_1^2 - \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi \cdot r_2^2 = \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi [r_1^2 - r_2^2] \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} [(7 \text{ सेमी})^2 - (3.5 \text{ सेमी})^2] \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} [49 \text{ सेमी}^2 - 12.25 \text{ सेमी}^2]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{22}{63} \times 36.75 \text{ सेमी}^2 \\
 &= \frac{22 \times 1.75}{3} \text{ सेमी}^2 \\
 &= \frac{38.5}{3} \Rightarrow 12.83 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 12.83 वर्ग सेमी है।

9. दिया है, चित्र में—

$$OA = OD = 7 \text{ सेमी},$$

$$OB = OC = (7 + 14) \Rightarrow 21 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } \angle BOC = 30^\circ$$

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड BOC का क्षेत्रफल

– त्रिज्यखण्ड AOD का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi r_1^2 - \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi r_2^2 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi [r_1^2 - r_2^2] \\
 &= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} [(21 \text{ सेमी})^2 - (7 \text{ सेमी})^2] \\
 &= \frac{11}{42} [441 \text{ सेमी}^2 - 49 \text{ सेमी}^2] = \frac{11}{42} \times 392 \text{ सेमी}^2 \\
 &= \frac{11 \times 28}{3} \text{ सेमी}^2 = \frac{308}{3} \Rightarrow 102.67 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 102.67 सेमी² है।

10. माना, $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुजाकार मैदान है। जिसकी प्रत्येक भुजा की माप 12 मी है। तथा बिन्दु C पर घोड़ा बंधा जो सिर्फ त्रिज्यखण्ड MNC तक का ही क्षेत्रफल चर सकता है।

∴ घोड़े को बंधी रस्सी की लम्बाई = 7 मी

∴ $CM = CN = 7$ मी

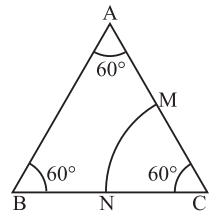
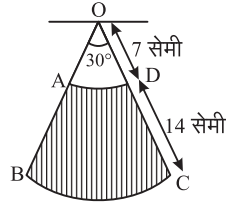
तथा

$$\angle ACB = 60^\circ$$

तब, त्रिज्यखण्ड MNC का क्षेत्रफल = $\frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (7 \text{ मी})^2$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 49 \text{ मी}^2 \\
 &= \frac{77}{3} \Rightarrow 25.67 \text{ मी}^2
 \end{aligned}$$

अतः त्रिभुजाकार मैदान के कोने पर बंधा घोड़ा 25.67 मी² क्षेत्रफल वाले भाग को चर सकता है।



11. माना, त्रिभुज ABC में—

$AB = 30$ मी, $BC = 40$ मी तथा $AC = 20$ मी

$\therefore$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \dots(1)$

दिया है, त्रिभुजाकार भूखण्ड के तीनों कोनों में तीन घोड़े प्रत्येक 7 मी० लम्बी रस्सी द्वारा बंधे हैं।

अब, त्रिज्यखण्ड AMN का क्षेत्रफल $= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$\therefore A_1 = \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi r_1^2 \dots(2)$$

त्रिज्यखण्ड BOP का क्षेत्रफल $= \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$\therefore A_2 = \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi r^2 \dots(3)$$

तथा, त्रिज्यखण्ड CQR का क्षेत्रफल $= \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$\therefore A_3 = \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi r^2 \dots(4)$$

समीकरण (2), (3) व (4) को जोड़ने पर—

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi r^2 + \frac{\angle B}{360^\circ} \pi r^2 + \frac{\angle C}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{\pi r^2}{360^\circ} [\angle A + \angle B + \angle C] \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{(7 \text{ सेमी})^2}{360^\circ} \times 180^\circ \quad \{\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ\} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{49 \text{ सेमी}^2}{2} \Rightarrow 11 \times 7 \Rightarrow 77 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः त्रिभुजाकार भूखण्ड के उस भाग का क्षेत्रफल 77 सेमी^2 है, जिसे तीनों घोड़े चर सकते हैं।

12. दिया है, $\triangle ABC$ में—

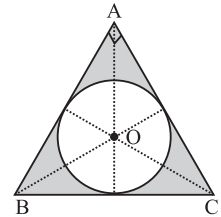
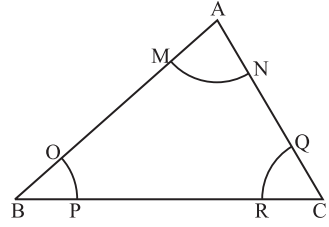
$\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ सेमी तथा $BC = 10$ सेमी

तथा $\triangle ABC$ के अन्तः वृत्त का केन्द्र O

माना, वृत्त की त्रिज्या $= r$

$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ (10 \text{ सेमी})^2 &= (6 \text{ सेमी})^2 + AC^2 \\ 100 \text{ सेमी}^2 &= 36 \text{ सेमी}^2 + AC^2 \end{aligned}$$



$$100 \text{ सेमी}^2 - 36 \text{ सेमी}^2 = AC^2$$

$$64 \text{ सेमी}^2 = AC^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{64} \text{ सेमी} \Rightarrow 8 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \text{ सेमी} \times 8 \text{ सेमी} = 24 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \Delta OBC \text{ का क्षेत्रफल} + \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} + \Delta OAC \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$\therefore 24 \text{ सेमी}^2 = \frac{1}{2} \times r \times BC + \frac{1}{2} \times r \times AB + \frac{1}{2} \times r \times AC$$

$$24 \text{ सेमी}^2 = \frac{1}{2} \times r [BC + AB + AC]$$

$$2 \times 24 \text{ सेमी}^2 = r [BC + AB + AC]$$

$$48 \text{ सेमी}^2 = r [10 \text{ सेमी} + 6 \text{ सेमी} + 8 \text{ सेमी}]$$

$$48 \text{ सेमी}^2 = r \times [24 \text{ सेमी}]$$

$$\therefore r = \frac{48 \text{ सेमी}^2}{24 \text{ सेमी}} \Rightarrow 2 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} - \text{अन्तः वृत्त का क्षेत्रफल} \\ &= 24 \text{ सेमी}^2 - \pi r^2 \\ &= 24 \text{ सेमी}^2 - \frac{22}{7} \times (2 \text{ सेमी})^2 \\ &= 24 \text{ सेमी}^2 - \frac{22 \times 4}{7} \text{ सेमी}^2 \\ &= 8 \left[3 - \frac{11}{7} \right] \text{ सेमी}^2 = 8 \left[\frac{21-11}{7} \right] \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{8 \times 10}{9} \Rightarrow \frac{80}{9} \text{ सेमी}^2 \text{ या } 11.43 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 11.43 वर्ग सेमी है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. माना $AB = BC = x$ सेमी

$\therefore$ समकोण ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$x^2 + x^2 = (7\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल } (\Delta ABC) = \text{क्षेत्रफल } (\Delta AOB) + \text{क्षेत्रफल } (\Delta BOC) + \text{क्षेत्रफल } (\Delta COA)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times x = \frac{1}{2} \times x \times r + \frac{1}{2} \times x \times r + \frac{1}{2} \times 7\sqrt{2} \times r$$

$$7 \times 7 = 7 \times r + 7 \times r + 7\sqrt{2} \times r = \frac{7}{2 + \sqrt{2}}$$

$$r = \frac{7}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{7(2 - \sqrt{2})}{2}$$

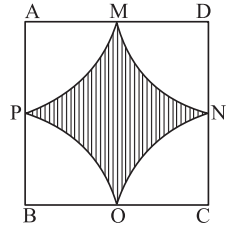
$$\begin{aligned} \therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{49(2 - \sqrt{2})^2}{4} \\ &= \frac{77}{2} \times (4 + 2 - 4\sqrt{2}) \\ &= 77(3 - 2\sqrt{2}) \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

2. माना, $ABCD$ अभीष्ट वर्ग है।

जिसमें $AB = BC = DC = DA = 10$ सेमी

तब, $AM = MD = AP = PB = BO = OC$
 $= DN = NC = 5$ सेमी $= r$ (माना)

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल
 - [त्रिज्यखण्ड AMP, BPO, CON तथा DMN का क्षेत्रफल]



$$\begin{aligned} \therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= AB^2 - \left[\frac{1}{4} \pi r^2 + \frac{1}{4} \pi r^2 + \frac{1}{4} \pi r^2 + \frac{1}{4} \pi r^2 \right] \\ &= AB^2 - \pi r^2 \left[\frac{1+1+1+1}{4} \right] \\ &= (10 \text{ सेमी})^2 - \frac{22}{7} \times (5 \text{ सेमी})^2 \times \frac{4}{4} \\ &= 100 \text{ सेमी}^2 - \frac{22}{7} \times 25 \text{ सेमी}^2 \\ &= 25 \left[4 - \frac{22}{7} \right] \text{ सेमी}^2 = 25 \left[\frac{28-22}{7} \right] \text{ सेमी}^2 \\ &= 25 \times \frac{6}{7} \text{ सेमी}^2 = \frac{150}{7} \Rightarrow 21.43 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 21.43 सेमी² है।

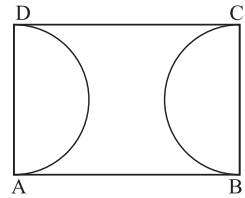
3. दिया है, आयत $ABCD$ में—

$AB = 18$ सेमी तथा $BC = 14$ सेमी

$\therefore$ अर्द्धवृत्ताकार कागज के टुकड़े का व्यास
 $(BC) = 14$ सेमी

तब, अर्द्धवृत्ताकार कागज के टुकड़े की त्रिज्या

$$(r) = \frac{14}{2} \Rightarrow 7 \text{ सेमी}$$



$$\begin{aligned} \therefore \text{शेष कागज का क्षेत्रफल} &= \text{आयत } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} - \text{अर्द्धवृत्त } BC \text{ का क्षेत्रफल} \\ &= AB \times BC - \pi r^2 \\ &= 18 \text{ सेमी} \times 14 \text{ सेमी} - \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7 \text{ सेमी})^2 = 252 \text{ सेमी}^2 - \frac{11}{7} \times 49 \text{ सेमी}^2 \\ &= (252 - 77) \text{ सेमी}^2 = 175 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

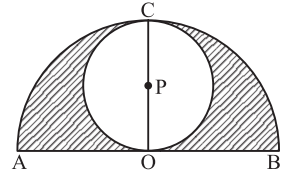
अतः शेष बचे कागज का क्षेत्रफल 175 सेमी² है।

4. दिया है, अर्द्धवृत्त की त्रिज्या = 7 सेमी

माना, $OA = OB = OC = R = 7$ सेमी

तब, $PO = PC = \frac{7}{2}$ सेमी

माना, $PO = PC = r = \frac{7}{2} = 3.5$ सेमी



$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = अर्द्धवृत्त ACB का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} \text{अतः वृत्त } OPC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \left[\frac{1}{2} \times (7 \text{ सेमी})^2 - (3.5 \text{ सेमी})^2 \right] \\ &= \frac{22}{7} \left[\frac{1}{2} \times 49 \text{ सेमी}^2 - 12.25 \text{ सेमी}^2 \right] \\ &= \left[\frac{22}{7} \times \frac{49}{2} - \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \right] \text{ सेमी}^2 \\ &= \left[11 \times 7 - \frac{4 \times 7}{2} \right] \text{ सेमी}^2 = 77 \times \left[\frac{2-1}{2} \right] \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{77}{2} \text{ सेमी}^2 \Rightarrow 38.5 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 38.5 सेमी² है।

5. दिया है, समलम्ब $ABCD$ में—

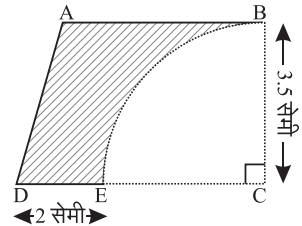
$$AB \parallel DC$$

$$\text{तथा } \angle BCD = 90^\circ$$

$$AB = BC = 3.5 \text{ सेमी}$$

$$\text{तथा } DE = 2 \text{ सेमी}$$

तब, छायांकित आकृति का क्षेत्रफल



= समलम्ब $ABCD$ का क्षेत्रफल - वृत्त के चतुर्थांश BEC का क्षेत्रफल

$$= DC \times BC - \frac{1}{4} \times \pi r^2 = (2 + 3.5) \text{ सेमी} \times 3.5 \text{ सेमी} - \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (3.5 \text{ सेमी})^2$$

$$= (5.5 \times 3.5) \text{ सेमी}^2 - \frac{1}{2} \times \frac{11}{7} \times 12.25 \text{ सेमी}^2 = \left[19.25 - \frac{11 \times 1.75}{2} \right] \text{ सेमी}^2$$

$$= (19.25 - 9.625) \text{ सेमी}^2 = 9.625 \text{ सेमी}^2$$

अतः शेष बचे हुए भाग का क्षेत्रफल 9.625 सेमी² है।

6. दिया है, आकृति में दोनों वृत्तों का अन्त स्पर्श बिन्दु = A

बड़े वृत्त का केन्द्र बिन्दु = O

AB = 54 सेमी तथा BC = 10 सेमी

तब, AC = AB - BC

$$= 54 \text{ सेमी} - 10 \text{ सेमी} \Rightarrow 44 \text{ सेमी}$$

∴ बड़े वृत्त का व्यास (AB) = 54 सेमी

तब, बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = $\frac{54}{2} \Rightarrow 27$ सेमी

∴ छोटे वृत्त का व्यास (AC) = 44 सेमी

तब, छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{44}{2} \Rightarrow 22$ सेमी

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल - छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi [R^2 - r^2]$$

$$= \frac{22}{7} [(27 \text{ सेमी})^2 - (22 \text{ सेमी})^2]$$

$$= \frac{22}{7} [(27)^2 - (22)^2] \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{22}{7} [(27+22)(27-22)] \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 49 \times 5 \text{ सेमी}^2$$

$$= 110 \times 5 \text{ सेमी}^2 \Rightarrow 550 \text{ सेमी}^2$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 550 सेमी² है।

7. $\angle OAP = 90^\circ$

आयत में $\triangle OAP$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

∴ $\theta = 60^\circ$

$$\angle AOB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \quad \dots(i)$$

प्रतिबिंब $\angle AOB = 360^\circ - \angle AOB$

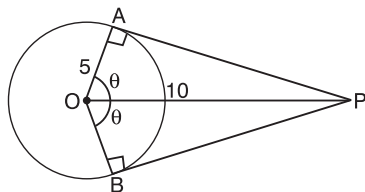
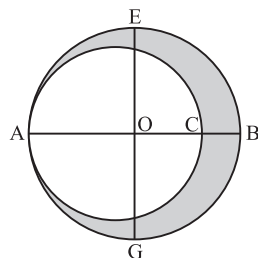
$$= 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\alpha = 240^\circ$$

बैल्ट का लेंस जो अभी भी पुलि के सम्पर्क में है = ABD

$$= \text{प्रमुख वृत्त} - \text{चाप के लेंस} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \right) 2\pi r$$

$$= \frac{240^\circ}{360^\circ} \times 2 \times 3.14 \times 5 = 20.93 \text{ सेमी}$$



आयत में

$$\Delta OAP$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AP}{OP}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AP}{10}$$

$$AP = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{क्षेत्रफल } \Delta OAP = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} \times AP \times OA$$

$$= \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 5$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ सेमी}^2$$

$$(\Delta OAP) = (\Delta OBP) \frac{25}{2} \sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

$$\text{मामूली क्षेत्र का क्षेत्रफल } OACB = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

$$\text{या } \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times (5)^2 \quad \dots(i) \text{ से}$$

$$\frac{78.5}{3} = 26.16 = 36.14 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{छायांकित क्षेत्रफल} = (\Delta OAP) = (\Delta OBP) - \text{मामूली क्षेत्र का क्षेत्रफल } OACB$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} - 26.17$$

$$= 25\sqrt{3} - 26.17$$

$$= 43.25 - 26.17 = 17.08 \text{ सेमी}^2$$

8. दिया है, आकृति में— ΔABC एक समकोण त्रिभुज है,

जिसमें $\angle BAC = 90^\circ$ है।

तब, पाइथागोरस प्रमेय से—

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$= (21 \text{ सेमी})^2 + (28 \text{ सेमी})^2$$

$$= 441 \text{ सेमी}^2 + 784 \text{ सेमी}^2$$

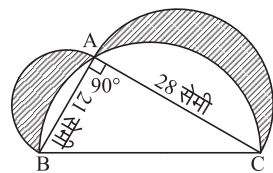
$$= 1225 \text{ सेमी}^2$$

$$\therefore BC = \sqrt{1225} \text{ सेमी}^2$$

$$BC = 35 \text{ सेमी}$$

माना, व्यास AB वाले वृत्त की त्रिज्या = r_1

व्यास AC वाले वृत्त की त्रिज्या = r_2



तथा, व्यास BC वाले वृत्त की त्रिज्या $= R$

तब, $r_1 = \frac{21}{2}$ सेमी $\Rightarrow 10.5$ सेमी

$r_2 = \frac{28}{2}$ सेमी $\Rightarrow 14$ सेमी

तथा, $R = \frac{35}{2}$ सेमी $\Rightarrow 17.5$ सेमी

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल $=$ (व्यास AB व AC वाले वृत्तों का क्षेत्रफल)
 $+ \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $-$ व्यास B वाले वृत्त का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \frac{1}{2} \times AB \times AC - \pi R^2 \\ &= \pi [r_1^2 + r_2^2 - R^2] + \frac{1}{2} \times AB \cdot AC \\ &= \frac{22}{7} [(10.5 \text{ सेमी})^2 + (14 \text{ सेमी})^2 - (17.5 \text{ सेमी})^2] + \frac{1}{2} \times 21 \text{ सेमी} \times 28 \text{ सेमी} \\ &= \frac{22}{7} [110.25 \text{ सेमी}^2 + 196 \text{ सेमी}^2 - 306.25 \text{ सेमी}^2] + (21 \times 14) \text{ सेमी}^2 \\ &= \frac{22}{7} [306.25 \text{ सेमी}^2 - 306.25 \text{ सेमी}^2] + 294 \text{ सेमी}^2 = \frac{22}{7} \times 0 + 294 \text{ सेमी}^2 \\ &= 0 + 294 \text{ सेमी}^2 \Rightarrow 294 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल 294 वर्ग सेमी है।

विविध प्रश्नावली

1. (c) 2. (a) 3. (b) 4. (b) 5. (a) 6. (a) 7. (c) 8. (b)
9. (a) 10. (d)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (b) 2. (a) 3. (d) 4. (a)

चित्र आधारित प्रश्न

1. चित्र से—

वर्ग $PQRS$ की भुजा $= 27$ सेमी

तब वर्ग $PQRS$ का क्षेत्रफल $=$ (भुजा)²
 $= (27)^2 = 289$ वर्ग सेमी

2. चित्र से—

कार पार्किंग वाले आयताकार क्षेत्र की लम्बाई 27 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है।

अतः पार्किंग वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल $=$ लंबाई $\times$ चौड़ाई
 $= 27 \times 3 = 81$ वर्ग सेमी

3. चित्र से—

$$PS = UT = 27 \text{ सेमी}$$

$$\therefore PS = PV + VS$$

$$PS = PV + PV \quad [\because PV = VS \text{ अर्द्धवृत्त समरूप है।}]$$

$$\Rightarrow PV = \frac{PS}{2} = \frac{27}{2} = 13.5 \text{ सेमी}$$

$$PV, \text{ अर्द्धवृत्त का व्यास है, तब अर्द्धवृत्त की त्रिज्या} = \frac{PV}{2} = \frac{13.5}{2} = 6.75 \text{ सेमी होगी।}$$

4. चित्र से—

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = आयत $QRTV$ का क्षेत्रफल $- 2 \times$ (अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल)

$$= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} - 2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) = RT \times UT - \pi r^2$$

$$= 30 \times 27 - \frac{22}{7} \times 6.75 \times 6.75 \quad [\because r = 6.75 \text{ सेमी}]$$

$$= 810 - 143.19 = 666.8 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 666.8 वर्ग सेमी है।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iii) 2. (iv)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (d) 2. (d) 3. (a) 4. (b)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(ii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. असत्य 2. सत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य

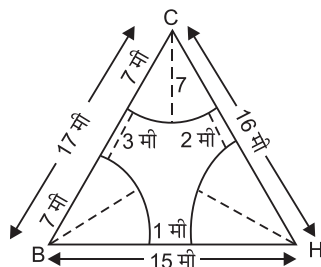
उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. दिया गया है कि, एक त्रिकोणीय खेत जिसके तीन कोनों पर एक गाय, एक भैंस और एक घोड़ा अलग-अलग रस्सियों से बंधे हैं।

तो, प्रत्येक जानवर ने त्रिकोणीय क्षेत्र के प्रत्येक कोने में एक सेक्टर के रूप में खेत चरा है।

दिया गया है, प्रत्येक त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या

$$(r) = 7 \text{ मी०}$$



अब, $\angle C$ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2$ मी²

$\angle B$ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2$ मी²

और $\angle H$ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\angle H}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle H}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2$ मी²

$\therefore$ तीनों सेक्टरों के क्षेत्रफल का योग

$$\begin{aligned} &= \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2 + \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2 + \frac{\angle H}{360^\circ} \times \pi \times (7)^2 \\ &= \frac{(\angle C + \angle B + \angle H)}{360^\circ} \times \pi \times 49 \\ &= \frac{180^\circ}{360} \times \frac{22}{7} \times 49 = 11 \times 7 \end{aligned}$$

दिए गए हैं, त्रिभुज की भुजाएँ $a = 15$, $b = 16$ और $c = 17$ है।

अब, त्रिभुज का अर्धपरिमाप (s) $= \frac{a + b + c}{2}$

$$s = \frac{15 + 16 + 17}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{हेरॉन के सूत्र द्वारा}) \\ &= \sqrt{24(24-15)(24-16)(24-17)} \\ &= \sqrt{24 \times 9 \times 8 \times 7} \\ &= 24\sqrt{21} \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

तो, खेत का वह क्षेत्र जो तीन जानवरों द्वारा नहीं चरा जा सकता = त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल – प्रत्येक क्षेत्रीय क्षेत्र का क्षेत्रफल $= (24\sqrt{21} - 77)$ वर्ग मीटर

अतः खेत का आवश्यक क्षेत्रफल जिसे तीन जानवर नहीं चर सकते $(24\sqrt{21} - 77)$ वर्ग मीटर है।

2. दिया है, एक वर्गाकार प्लेट जिसकी भुजा की लम्बाई 12.5 सेमी है।

काटी गयी वृत्ताकार का व्यास 7 सेमी है तब त्रिज्या

$$(r) = \frac{7}{2} \text{ सेमी होगी।}$$

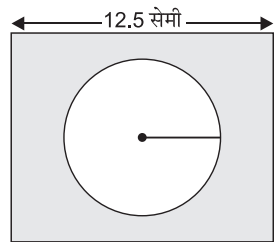
तो, वर्गाकार प्लेट का क्षेत्रफल $= (\text{भुजा})^2$

$$= (12.5)^2$$

$$= 156.25 \text{ वर्ग सेमी}$$

वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी है।

$\therefore$ वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल $= \pi r^2$



$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{27}{2} = 38.5 \text{ वर्ग सेमी}$$

∴ शेष भाग का क्षेत्रफल = वर्गाकार प्लेट का क्षेत्रफल – वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल
 $= 156.25 - 38.5 = 117.75$ वर्ग सेमी

दिया है, 1 वर्ग सेमी का भार = 0.8 ग्राम

तब, 117.75 वर्ग सेमी प्लेट का भार = $117.75 \times 0.8 = 94.2$ ग्राम

अतः शेष बचे प्लेट का भार 94.2 ग्राम होगा।

3. दिया गया है, तीन वृत्त इस प्रकार हैं कि उनमें से प्रत्येक अन्य दो को स्पर्श करता है।

यहाँ, AB, BC व CA को मिलाने से एक त्रिभुज प्राप्त होता है। तब,

∴ $AB = 2 \times$ वृत्त की त्रिज्या $= 2 \times 3.5 = 7$ सेमी

इसी प्रकार,

$$AC = BC = 7 \text{ सेमी}$$

तो, $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजा 7 सेमी है।

हम जानते हैं कि, एक समबाहु त्रिभुज की दो आसन्न भुजाओं के बीच प्रत्येक कोण 60° का होता है।

∴ $\angle A = 60^\circ$ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (3.5)^2$

कोण व त्रिज्या समान होने के कारण तीनों त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल समान होगा।

इसलिए, तीनों त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल $= 3 \times$ कोण A वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (3.5)^2 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ वर्ग सेमी}$$

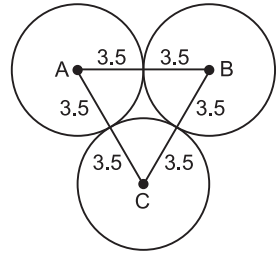
$$= 11 \times \frac{5}{10} \times \frac{35}{10} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \frac{77}{4} \text{ वर्ग सेमी} = 19.25 \text{ वर्ग सेमी}$$

और $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} (7)^2$ वर्ग सेमी

$$\left[\because \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 49 = \frac{49\sqrt{3}}{4} \text{ वर्ग सेमी}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ इन वृत्तों के बीच घिरे छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल} \\
 &= \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} - \text{प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} \\
 &= \frac{49\sqrt{3}}{4} - 19.25 \\
 &= 12.25 \times \sqrt{3} - 19.25 \\
 &= 21.2176 - 19.25 \\
 &= 1.9676 \text{ वर्ग सेमी}
 \end{aligned}$$

अतः इन वृत्तों के बीच घिरा आवश्यक क्षेत्रफल 1.967 वर्ग सेमी है।

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (c) दिया है—

$$\begin{aligned}
 \text{बड़े वृत्त की त्रिज्या} &= 32 \text{ मिमी} \\
 \text{तब, बड़े वृत्त का व्यास} &= 2 \times 32 = 64 \text{ मिमी} \\
 \therefore \text{छोटे वृत्त का व्यास} &= \frac{1}{8} \times \text{बड़े वृत्त का व्यास} \\
 &= \frac{1}{8} \times 64 = 8 \text{ मिमी} \\
 \text{तब, छोटे वृत्त की त्रिज्या} &= \frac{8}{2} = 4 \text{ मिमी} \\
 \text{तो, छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi (4)^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \\
 &= \frac{22}{7} \times 16 = \frac{352}{7} \\
 &= 50.28 \text{ मिमी}^2
 \end{aligned}$$

अतः प्रत्येक छोटे वृत्त (छिद्र) का क्षेत्रफल 50.28 मिमी² होगा।

2. (a) दिया है—

$$\begin{aligned}
 \text{बड़े वृत्त की त्रिज्या} &= 32 \text{ मिमी} \\
 \text{तब, बड़े वृत्त का व्यास} &= \pi (32)^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 32 \times 32 \\
 &= \frac{22528}{7} \\
 &= 3218.28 \text{ मिमी}^2
 \end{aligned}$$

अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल 3218.28 मिमी² होगा।

3. (c) दिया है—

$$\begin{aligned}
 \text{बड़े वृत्त की त्रिज्या} &= 32 \text{ मिमी} \\
 \text{तथा छोटे वृत्त की त्रिज्या} &= 4 \text{ मिमी}
 \end{aligned}$$

तब बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi (32)^2 = 1024 \pi$ वर्ग मिमी

तथा, छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi (4)^2 = 16 \pi$ वर्ग मिमी

4, छोटे वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4 \times 16 \pi = 64 \pi$ वर्ग मिमी

तब, बटन का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल - 4-छोटे वृत्तों का क्षेत्रफल
 $= 1024 \pi - 64 \pi = 960 \pi$ वर्ग मिमी

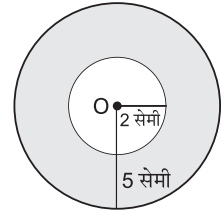
अतः बटन का क्षेत्रफल 960π वर्ग मिमी होगा।

4. (c) दिया है—

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = 5 सेमी

तथा छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 2 सेमी

$$\begin{aligned}\text{तब, दोनों वृत्तों के बीच घिरा क्षेत्रफल} &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi (R^2 - r^2) \\ &= \frac{22}{7} (5^2 - 2^2) \\ &= \frac{22}{7} (25 - 4) \\ &= \frac{22}{7} \times 21 \\ &= 22 \times 3 = 66 \text{ वर्ग सेमी}\end{aligned}$$



अतः दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल 66 वर्ग सेमी होगा।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (b) दिया गया है, ब्रूच A के वृत्त का व्यास = 28 मिमी

तब इसकी त्रिज्या (r) $= \frac{28}{2} = 14$ मिमी

इस ब्रूच-A में चार व्यास तार द्वारा बनाये गये हैं।

अब, वृत्त में लगे तार की लम्बाई = वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$$\begin{aligned}&= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \\ &= 88 \text{ मिमी}\end{aligned}$$

तथा, 4-व्यास बनाने में लगे तार की लम्बाई $= 4 \times$ वृत्त का व्यास

$$\begin{aligned}&= 4 \times 28 \\ &= 112 \text{ मिमी}\end{aligned}$$

तब चाँदी के तार की कुल लम्बाई जो ब्रूच-A में प्रयोग हुआ = वृत्त में लगे तार की लम्बाई + 4-व्यास बनाने में लगा तार $= 88 + 112 = 200$ मिमी

अतः चाँदी के तार की कुल लम्बाई 200 मिमी होगी।

2. (c) चूँकि तार, वृत्त को 8-बराबर भागों में बाँटता है।

इसलिए, ब्रूच-A के प्रत्येक सेक्टर का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} \times \pi r^2 \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\
 &= 11 \times 7 = 77 \text{ वर्ग मिमी}
 \end{aligned}$$

अतः ब्रूच A के प्रत्येक सेक्टर का क्षेत्रफल 77 वर्ग मिमी होगा।

3. (d) दिया है, चाँदी वाले भाग की परिधि = 44 मिमी

$$\begin{aligned}
 \therefore 2\pi R &= 44 \\
 2 \times \frac{22}{7} \times R &= 44
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R = 7 \text{ मिमी}$$

ब्रूच B के बाहरी वृत्त की त्रिज्या (R') = $7 + 3 = 10$ मिमी

तब, ब्रूच B के बाहरी भाग की परिधि = $2\pi R'$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 6.286 \times 10$$

$$= 62.86 \text{ मिमी}$$

अतः ब्रूच B के बाहरी भाग की परिधि 62.86 मिमी होगी।

4. (c) हमें ज्ञात है—

ब्रूच-B में सोने के भाग की त्रिज्या (R) = 10 मिमी

तथा चाँदी के भाग की त्रिज्या (r) = 7 मिमी

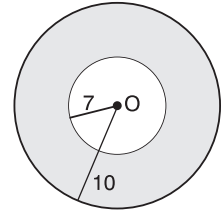
तब, सोने व चाँदी के क्षेत्रफलों में अन्तर = $\pi R^2 - \pi r^2$

$$= \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \pi (10^2 - 7^2)$$

$$= \pi (100 - 49)$$

$$= 51\pi \text{ मिमी}^2$$



अतः सोने व चाँदी के क्षेत्रफलों के बीच अन्तर 51π मिमी² होगा।

5. (c) हमें ज्ञात है—

ब्रूच-B की त्रिज्या (R) = 10 मिमी

तब, एक चक्कर में इसके ऊपर चली गयी दूरी = ब्रूच-B की परिधि = $2\pi R$

$$= 2\pi (10) = 20\pi$$

$$\text{तो चक्करों की संख्या} = \frac{\text{कुल चली गयी दूरी}}{\text{एक चक्कर में चली गयी दूरी}} = \frac{80\pi}{20\pi} = 4$$

अतः 80π मिमी दूरी तय करने में लड़के को पेंसिल से 4 चक्कर लगाने होंगे।



प्रश्नावली 12 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, दो सर्वसम घनों के सिरा मिलाकर जोड़ा जाता है।

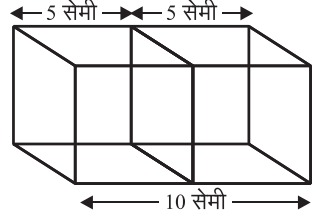
तथा प्रत्येक घन का क्षेत्रफल = 125 सेमी^2

∴ इस प्रकार प्राप्त घनाभ का आयतन

= दोनों घनों का आयतनों का योगफल

= $125 \text{ सेमी}^3 + 125 \text{ सेमी}^3$

= 250 सेमी^3



अतः दोनों सर्वसम घनों को सिरों से सिरा जोड़कर बनाए गए घनाभ का आयतन 250 घन सेमी है।

2. दिया है, एक घन से बड़े-से-बड़ा लम्बवृत्तीय शंकु काटा जाता है घन की कोर = 4.2 सेमी

तब, घन से काटे जाने वाले सबसे बड़े शंकु का व्यास = 4.2 सेमी

∴ शंकु की त्रिज्या = $\frac{4.2}{2} = 2.1 \text{ सेमी}$

अब शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

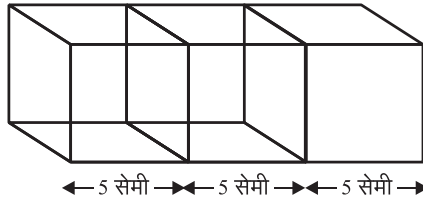
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 4.2$$

$$= \frac{22 \times 21 \times 21 \times 42}{30 \times 70 \times 10} = \frac{22 \times 21 \times 42}{1000}$$

$$= 19.404 \text{ सेमी}^3$$

3. दिया है, तीन सर्वसम घनों के सिरों मिलाकर जोड़ा जाता है।

तथा प्रत्येक घन का क्षेत्रफल = 125 सेमी^2

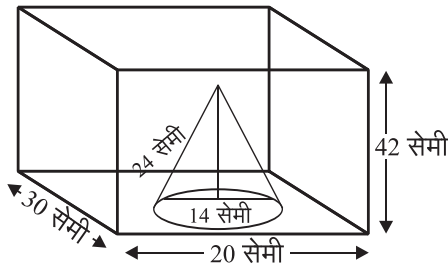


$$l = 15, b = 5, h = 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{इस प्रकार घनाभ का वक्रपृष्ठ} &= 2(lb + bh + hl) \text{ वर्ग इकाई} \\
 &= 2(15 \times 5 + 5 \times 5 + 5 \times 15) \\
 &= 2(75 + 25 + 75) \\
 &= 2 \times 175 = 350 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \text{ आयताकार ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2(lb + bh + hl) \\
 &= 2(42 \times 30 + 30 \times 20 + 20 \times 42) \text{ सेमी}^2 \\
 &= 2(1260 + 600 + 840) \text{ सेमी}^2 \\
 &= 2 \times 2700 \text{ सेमी}^2 \\
 &= 5400 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{h^2 + r^2} \\
 &= \sqrt{(24)^2 + (7)^2} \text{ सेमी} \\
 &= \sqrt{576 + 49} \text{ सेमी} \\
 &= \sqrt{625} = 25 \text{ सेमी}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} &= \pi r l \\
 &= \frac{22}{7} \times 7 \text{ सेमी} \times 25 \text{ सेमी} = 550 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{तथा शंकु के आधार का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times (7 \text{ सेमी})^2 \\
 &= 22 \times 7 = 154 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल} - \text{शंकु के आधार का क्षेत्रफल} \\
 &= 5400 \text{ सेमी}^2 + 550 \text{ सेमी}^2 - 154 \text{ सेमी}^2 \\
 &= 5746 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$5. \text{ बेलन का आयतन} = 2\pi r^2 h$$

$$\text{दोगुना करने पर} = 2 \times 2\pi r^2 h$$

$$\text{बेलन का वक्रपृष्ठ} = 2\pi r h$$

...(i)

$$\text{आधार की त्रिज्या} = r$$

...(ii)

$$\begin{aligned}\text{दोनों की गुणा करने पर} &= 2\pi rh \times r \\ &= 2\pi r^2 h\end{aligned}$$

जोकि बेलन का आयतन होता है,

(इति सिद्धम्)

$$\begin{aligned}6. \text{ घनाभाकार पेटी का आयतन} &= l \times b \times h \\ &= 16 \text{ सेमी} \times 8 \text{ सेमी} \times 8 \text{ सेमी} \\ &= 1024 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा शीशे की एक गोली का आयतन} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{201}{64} \times (2 \text{ सेमी})^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{207}{4} \times 8 \text{ सेमी}^3 \\ &= \frac{67}{2} \text{ सेमी}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 16 \text{ गोलो का आयतन} &= 16 \times \frac{67}{2} \text{ सेमी}^3 \\ &= 536 \text{ सेमी}^3\end{aligned}$$

अतः पेटी में भरे गए पानी का आयतन = सम्पूर्ण पेटी का आयतन - 16 गोलो का आयतन

$$\begin{aligned}&= 1024 \text{ सेमी}^3 - 536 \text{ सेमी}^3 \\ &= 488 \text{ सेमी}^3.\end{aligned}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, भवन का व्यास = 4.2 मी
तथा भवन के बेलनाकार भाग की ऊँचाई $H = 3.8$ मी
तथा भवन के ऊपरी शंकवाकार भाग का शीर्ष कोण = 90°
माना, शंकवाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई = l
तब,

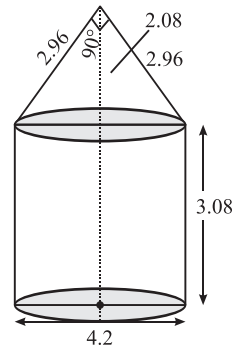
$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{l}{4.2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4.2 &= l \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \times 4.2 &= l\end{aligned}$$

$$201 \times \sqrt{2} = 2.96 \text{ मी}$$

$\therefore$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$



$$h = \sqrt{(2.96)^2 - (2.1)^2}$$

$$h = \sqrt{8.76 - 4.41}$$

$$h = \sqrt{4.35} = 2.08 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः भवन के पृष्ठ का क्षेत्रफल} &= 2\pi rH + \pi rl = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 3.8 + \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.96 \\ &= 2.1 \times \frac{22}{7} (7.6 + 2.96) = 3 \times 22 (10.56) \\ &= 6.6 \times 10.56 = 69.76 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

अतः भवन का पृष्ठीय क्षेत्रफल 69.76 मी² है।

$$\begin{aligned} \text{तथा भवन का आयतन} &= \pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^2 H \\ &= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3} h \right) = \frac{\pi r^2 (3H + h)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 (3 \times 3.8 + 2.08) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.41 (11.4 + 2.08) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.41 \times 13.48 \\ &= \frac{1307.82}{3} = 62.27 \text{ मी}^3 \end{aligned}$$

अतः भवन का आयतन 62.27 मी³ है।

2. दिया है, वृत्ताकार तम्बू बेलन के ऊपर लम्बवृत्तीय शंकु की शक्ल में है।

∴ तम्बू की अधिकतम ऊँचाई = 40 मी

तथा न्यूनतम ऊँचाई = 19 मी

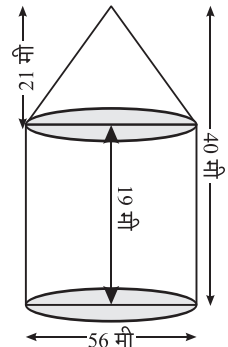
∴ तम्बू के बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h_1) = 19 मी

तथा तम्बू के शंकवाकार भाग की ऊँचाई (h_2) = (40 - 19) मी
= 21 मी

तथा तम्बू के आधार का व्यास = 56 मी

तब, तम्बू के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{56}{2} \Rightarrow 28$ मी

$$\begin{aligned} \text{अब, तम्बू के शंकवाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई (l)} &= \sqrt{h_2^2 + r^2} \\ &= \sqrt{(21)^2 + (28)^2} \text{ मी} \\ &= \sqrt{441 + 784} \text{ मी} \\ &= \sqrt{1225} \text{ मी} \Rightarrow 35 \text{ मी} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ तम्बू के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} &= 2\pi rh_1 + \pi rl = \pi r(2h_1 + l) \\
 &= \frac{22}{7} \times 28 \text{ मी} \times (2 \times 19 \text{ मी} + 35 \text{ मी}) \\
 &= 88 \text{ मी} \times (38 + 35) \text{ मी} \\
 &= 88 \times 73 \text{ मी}^2 \\
 &= 6424 \text{ मी}^2
 \end{aligned}$$

$\therefore$ कैनवास का 20% क्षेत्रफल मोड़ी और सिलाई के लिए देना होगा।

$$\therefore \text{ कैनवास का } (100 - 20)\% = 64284 \text{ मी}^2$$

$$\text{कैनवास का } 80\% = 6484 \text{ मी}^2$$

$$\text{तब, कुल आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल} = \frac{6484}{80} \times 100 \text{ मी} = (803 \times 10) \Rightarrow 8030 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अब, तम्बू का आयतन} &= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 \\
 &= \pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times (28 \text{ मी})^2 \times \left(19 \text{ मी} + \frac{1}{3} \times 21 \text{ मी} \right) \text{ मी} \\
 &= \frac{22 \times 784}{7} \text{ मी}^2 \times (19 + 7) \text{ मी} \\
 &= (22 \times 112) \text{ मी}^2 \times 26 \text{ मी} \\
 &= (2464 \times 26) \text{ मी}^3 \\
 &= 64064 \text{ मी}^3
 \end{aligned}$$

$\therefore$ एक व्यक्ति के लिए साँस लेने के लिए आवश्यक वायु = 176 घन मी

तथा तम्बू का आयतन = 64064 घन मी

$$\therefore \text{ तम्बू में आवश्यक व्यक्तियों की संख्या} = \frac{64064}{176} = \frac{4004}{11} \Rightarrow 364$$

अतः तम्बू के लिए आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल 8030 वर्ग मी है, तथा तम्बू में कुल 364 व्यक्तियों को ठहराया जा सकता है।

3. दिया है, एक तम्बू के नीचे का भाग लम्बवृत्तीय बेलनाकार तथा ऊपरी भाग शंकवाकार है।

तम्बू के आधार का व्यास = 14 मी

$$\therefore \text{ तम्बू के आधार की त्रिज्या } (r) = \frac{14}{2} \Rightarrow 7 \text{ मी}$$

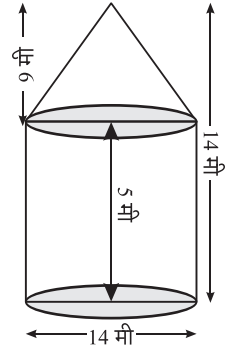
तम्बू की सम्पूर्ण ऊँचाई = 14 मी

तथा बेलानाकार भाग की ऊँचाई $(h_1) = 5$ मी

तब, शंकवाकार भाग की ऊँचाई $(h_2) = (14 - 5) \text{ मी} \Rightarrow 9 \text{ मी}$

अब, तम्बू का आयतन = तम्बू के शंकवाकार तथा बेलनाकार भागों का आयतन

$$\begin{aligned}
 &= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{2} \pi r^2 h_2 \\
 &= \pi r^2 \left(h_1 + \frac{h_2}{3} \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times (7 \text{ मी})^2 \times \left(5 \text{ मी} + \frac{9}{3} \right) \text{ मी} \\
 &= \frac{22}{7} \times 49 \text{ मी}^2 \times (5+3) \text{ मी} \\
 &= 22 \times 7 \text{ मी}^2 \times 8 \text{ मी} \\
 &= (154 \times 8) \text{ मी}^3 = 1232 \text{ मी}^3
 \end{aligned}$$



अतः तम्बू का आयतन 1232 घन मीटर है।

4. दिया है, एक खाली बर्तन के निचले भाग का आधार 14 सेमी व्यास का एक अर्द्ध गोलीय प्याला है और उसका ऊपरी भाग उसी आधार पर एक लम्बवृत्तीय बेलन के आकार का है।

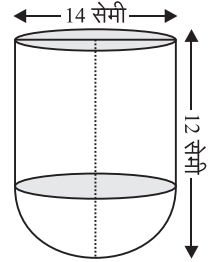
$$\therefore \text{ अर्द्धगोले की त्रिज्या } (r) = \frac{14}{2} \Rightarrow 7 \text{ सेमी}$$

तथा बर्तन की सम्पूर्ण ऊँचाई = 12 सेमी

तब, बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = (12 - 7) सेमी = 5 सेमी

अब, बर्तन का आयतन = अर्द्धगोलीय भाग का आयतन
+ बेलनाकार भाग का आयतन

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (7 \text{ सेमी})^3 + \frac{22}{7} (7 \text{ सेमी})^2 \times 5 \text{ सेमी} \\
 &= \frac{44}{21} \times 343 \text{ सेमी}^3 + \frac{22}{7} \times 49 \text{ सेमी}^2 \times 5 \text{ सेमी} \\
 &= \frac{44 \times 49}{3} \text{ सेमी}^3 + 110 \times 7 \text{ सेमी}^3 \\
 &= \left(\frac{2156}{3} + 770 \right) \text{ सेमी}^3 \\
 &= 718.67 + 770 \text{ सेमी}^3 \\
 &= 1488.67 \text{ सेमी}^3
 \end{aligned}$$



अतः बर्तन में कुल 1488.67 घन सेमी पानी भरा जा सकता है।

5. अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ = $3\pi r^2$
 $= 3 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु के आधार का क्षेत्रफल

$$\text{शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 12.5 = \pi d$$

$$= 137.5 \text{ सेमी}^2$$

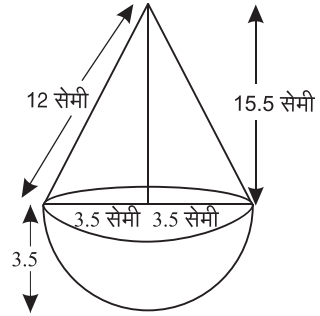
$$l = \sqrt{156.25}$$

$$l = 12.5 \text{ सेमी}$$

गोलाद्ध का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 = 77 \text{ सेमी}^2$$



इसलिए, खिलौने का कुल सतह क्षेत्र = $137.5 + 77 = 214.5 \text{ सेमी}^2$

6. अर्द्धगोलाकार भाग की त्रिज्या

$$r = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ सेमी}$$

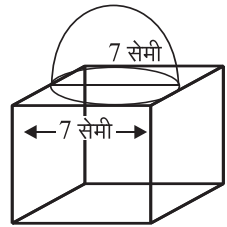
टोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनीय भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोलाकार भाग का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल - अर्द्धगोलाकार भाग के आधार का क्षेत्रफल

$$= 6 (\text{किनारे})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$$

$$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= 294 + 38.5$$

$$= 332.5 \text{ सेमी}^2$$



7. तम्बू संलग्न आकृति जैसा होगा।

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h) = 2.1 मी

शंकवाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $l = 2.8$ मी

बेलनाकार तथा शंकवाकार दोनों भागों के आधार की

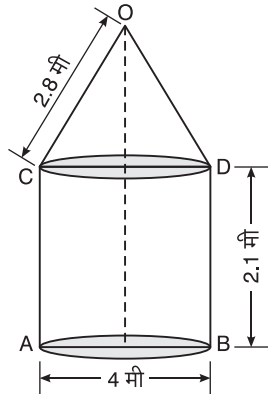
उभयनिष्ठ त्रिज्या $r = \frac{4}{2} = 2$ मी

तम्बू बनाने में प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकवाकार भाग का तिरछा वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r (2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 2 [2 \times 2.1 + 2.8] \text{ मी}^2 = \frac{44}{7} [4.2 + 2.8] \text{ मी}^2$$

$$= \frac{44}{7} \times 7 \text{ मी}^2 = 44 \text{ मी}^2$$



अब, $l = 2.8$ मी, $r = 2$ मी

तब $l^2 = r^2 + (h')^2 \Rightarrow (h')^2 = l^2 - r^2$

$$(h')^2 = (28)^2 - (2)^2 \Rightarrow (h')^2 = 7.84 - 4$$

$$(h')^2 = 3.84$$

$$h' = \sqrt{3.84}$$

$$h' = 1.95 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned} \text{तब, तम्बू के भीतर हवा का आयतन} &= \text{शंकु का आयतन} + \text{बेलन का आयतन} \\ &= \text{शंकु का आयतन} + \text{बेलन का आयतन} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h' + \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 \left(\frac{1}{3} h' + h \right) \\ &= \frac{22}{7} \times (2)^2 \left(\frac{1}{3} \times 1.95 + 2.1 \right) \\ &= \frac{22}{7} \times 4 (0.65 + 2.1) \\ &= \frac{22 \times 4 \times 2.75}{7} = \frac{242}{7} \\ &= 34.57 \text{ मी}^3 \end{aligned}$$

अतः तम्बू के भीतर हवा का आयतन 34.57 मी^3 होगा।

8. दिया है, उभयनिष्ठ सम आधार पर अर्द्धगोला व एक लम्बवृत्तीय शंकु रखकर एक ठोस बनाया गया है।

माना, ठोस की त्रिज्या = r

$\therefore$ ठोस का आयतन

$$= \text{अर्द्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}$$

$$\therefore \text{ ठोस का आयतन (दिया है)} = 64\pi \text{ सेमी}^3$$

तथा शंकु की ऊँचाई (h) = 4 सेमी

$$\therefore \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h = 64\pi$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (2r + h) = 64\pi$$

$$r^2 (2r + 4 \text{ सेमी}) = 64 \times 3$$

$$2r^3 + 4r^2 = 192$$

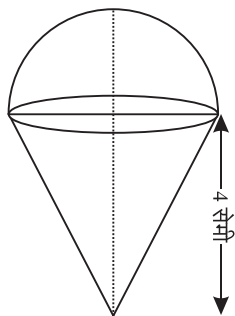
$$2(r^3 + 2r^2) = 192$$

$$r^3 + 2r^2 = \frac{192}{2} \Rightarrow 96$$

$$r^3 + 2r^2 - 96 = 0$$

$$r^2 (r - 4) + 6r(r - 4) + 24 = 0 \Rightarrow (r - 4)(r^2 + 6r + 24) = 0$$

$$\text{यदि } (r - 4) = 0, \quad \text{तब } r = 4$$



$$\begin{aligned}\text{यदि } (r^2 + 6r + 24) = 0, \text{ तब } r &= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \times 24}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 96}}{2} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 - 96} = -3 \pm \sqrt{-15} \text{ (अमान्य)} \\ \therefore r &= 4 \text{ सही मान है।}\end{aligned}$$

अतः दिए गए ठोस के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या 4 सेमी है।

9. दिया है, एक समान वृत्तीय आधार पर समान ऊँचाई के लम्बवृत्तीय बेलन अर्द्धगोला तथा लम्बवृत्तीय शंकु बनाए गए हैं।

माना, बेलन, अर्द्धगोले व शंकु की त्रिज्या = r

तब, अर्द्धगोले की ऊँचाई (h) = अर्द्धगोले की त्रिज्या = r

$\therefore$ बेलन व शंकु की भी ऊँचाई = r

अब, बेलन का आयतन: अर्द्धगोले का आयतन: शंकु का आयतन

$$\begin{aligned}&= \pi r^2 \times r : \frac{2}{3} \pi r^3 : \frac{1}{3} \pi r^2 \times r \\ &= \pi r^3 : \frac{2}{3} \pi r^3 : \frac{1}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi r^3 [3 : 2 : 1] \Rightarrow 3 : 2 : 1\end{aligned}$$

अतः बेलन, अर्द्धगोले और शंकु के आयतनों में अनुपात 3 : 2 : 1 है।

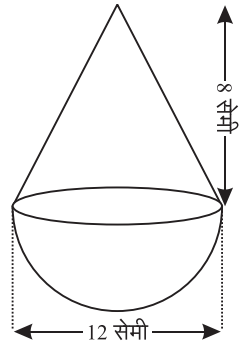
10. दिया है, एक ठोस गोलाद्ध के समतलीय आधार पर एक लम्बवृत्तीय शंकु को सटाकर रखा गया है।

शंकु के आधार व गोलाद्ध का व्यास = 12 सेमी

$$\therefore \text{शंकु के आधार व गोलाद्ध की त्रिज्या } (r) = \frac{12}{2} = 6 \text{ सेमी}$$

तथा शंकु की ऊँचाई (h) = 8 सेमी

$$\begin{aligned}\text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } (l) &= \sqrt{h^2 + r^2} \\ &= \sqrt{(8 \text{ सेमी})^2 + (6 \text{ सेमी})^2} \\ &= \sqrt{64 \text{ सेमी}^2 + 36 \text{ सेमी}^2} \\ &= \sqrt{100} \text{ सेमी} = 10 \text{ सेमी}\end{aligned}$$



अब, सम्पूर्ण ठोस का वक्रपृष्ठ

$$\begin{aligned}&= \text{अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\ &= 2\pi r^2 + \pi r l = \pi r [2r + l] \\ &= 3.14 \times 6 \text{ सेमी} \times [2 \times 6 \text{ सेमी} + 10 \text{ सेमी}] \\ &= 18.84 \text{ सेमी} \times [12 + 10] \text{ सेमी} \\ &= (18.84 \times 22) \text{ सेमी}^2 = 414.48 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

तथा सम्पूर्ण टोस का आयतन = अर्द्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 [2r + h] \\
 &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times (6 \text{ सेमी})^2 \times [2 \times 6 \text{ सेमी} + 8 \text{ सेमी}] \\
 &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 36 \text{ सेमी}^2 \times [12 + 8] \text{ सेमी} \\
 &= 3.14 \times 12 \text{ सेमी}^2 \times 20 \text{ सेमी} \\
 &= (62.8 \times 12) \text{ सेमी}^3 = 753.6 \text{ सेमी}^3
 \end{aligned}$$

अतः सम्पूर्ण टोस का वक्रपृष्ठ 414.48 वर्ग सेमी तथा आयतन 753.6 घन सेमी है।

11. दिया है, एक ही आधार में एक अर्द्धगोला तथा एक लम्बवृत्तीय शंकु का एक टोस बनाया गया है।

शंकु की ऊँचाई (h) = 4 सेमी सम्पूर्ण टोस का आयतन = $\frac{33\pi}{3}$ घन सेमी

माना, अर्द्धगोले व शंकु के आधार की त्रिज्या = r

तब, शंकु का आयतन + अर्द्धवृत्त का आयतन = $\frac{32\pi}{3}$ सेमी³

$$\therefore \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ सेमी}^3$$

$$\frac{\pi}{3} r^2 [h + 2r] = \frac{32\pi}{3} \text{ सेमी}^3$$

$$r^2 [4 \text{ सेमी} + 2r] = 32 \text{ सेमी}^3$$

$$r^2 [4 + 2r] = 32$$

$$4r^2 + 2r^3 = 32$$

$$2[2r^2 + r^3] = 32$$

$$2r^2 + r^3 = \frac{32}{2} \Rightarrow 16$$

$$2r^2 + r^3 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 + 2r^2 - 16 = 0$$

$$r^2 (r - 2) + 4(r - 2) + 8(r - 2) = 0$$

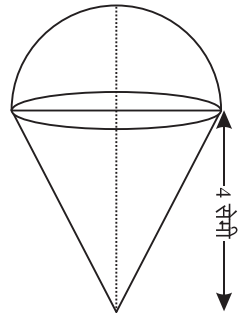
$$(r - 2)(r^2 + 4r + 8) = 0$$

यदि $r - 2 = 0$, तब $r = 2$ सेमी

$$\begin{aligned}
 \text{यदि } r^2 + 4r + 8 = 0, \quad \text{तब } r &= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1-2}}{2} \\
 &= -2 \pm 2\sqrt{-1} \text{ (अमान्य)}
 \end{aligned}$$

$\therefore r = 2$ सही मान है।

अतः अर्द्धगोले व लम्बवृत्तीय शंकु की उभयनिष्ठ त्रिज्या 2 सेमी है।



12. दिया है, किसी धातु का एक ठोस एक अर्द्धगोले के समतल पृष्ठ पर रखे एक शंकु के आकार का है। अर्द्धगोले व शंकु के आधार का व्यास (d) = 20 सेमी

$$\therefore \text{अर्द्धगोले व शंकु के आधार की त्रिज्या } (r) = \frac{20}{2} = 10 \text{ सेमी}$$

माना, शंकु की तिर्यक ऊँचाई = l

$$\therefore \text{शंकु का शीर्ष कोण} = 90^\circ$$

$$\therefore l^2 + l^2 = d^2$$

$$2l^2 = (20 \text{ सेमी})^2$$

$$2l^2 = 400 \text{ सेमी}^2$$

$$l^2 = \frac{400}{2} \Rightarrow 200 \text{ सेमी}^2$$

$$l = \sqrt{200} \Rightarrow 10\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\text{अब, शंकु की ऊँचाई } (h) = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - (10)^2} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{200 - 100} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{100} \Rightarrow 10 \text{ सेमी}$$

अब, ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h + 2r)$$

$$= \frac{\pi}{3} \times (10 \text{ सेमी})^2 \times [10 \text{ सेमी} + 2 \times 10 \text{ सेमी}]$$

$$= \frac{\pi}{3} \times 100 \text{ सेमी}^2 \times [10 + 20] \text{ सेमी}$$

$$= \frac{\pi}{3} \times 100 \text{ सेमी}^2 \times 30 \text{ सेमी}$$

$$= 1000\pi \text{ सेमी}^3$$

तथा ठोस का वक्रपृष्ठ = शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r [l + 2r]$$

$$= \pi \times 10 \text{ सेमी} [10\sqrt{2} \text{ सेमी} + 2 \times 10 \text{ सेमी}]$$

$$= 10\pi \text{ सेमी} \times 10\sqrt{2} [1 + \sqrt{2}] \text{ सेमी}$$

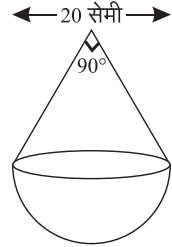
$$= 100\sqrt{2} \pi [1 + \sqrt{2}] \text{ सेमी}$$

$$= 100\sqrt{2} [1 + \sqrt{2}] \pi \text{ सेमी}^2 \text{ या } 100 \times [2 + 1.4142] \pi \text{ सेमी}^2$$

$$= 100 \times 3.4142 \pi \text{ सेमी}^2$$

$$= 341.42 \pi \text{ सेमी}^2$$

अतः दिए गए ठोस का आयतन 1000π घन सेमी तथा पृष्ठीय $100\sqrt{2} [1 + \sqrt{2}] \pi$ वर्ग सेमी या 341.42π वर्ग सेमी है।



13. दिया है, शंकु की त्रिज्या = 0.5 सेमी

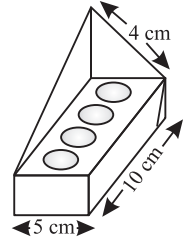
$$h = 2.1 \text{ सेमी}$$

$$l = \sqrt{(2.1)^2 + (0.5)^2}$$

$$l = \sqrt{4.41 + 2.5}$$

$$l = \sqrt{6.91}$$

$$l = 2.63$$



$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.5)^2 \times 2.1$$

ऐसे ही 4 शंक्वाकार गड्ढे हैं।

$$= 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.25 \times 2.1$$

$$= \frac{4 \times 22 \times 0.25 \times 0.3}{3}$$

$$= 8.8 \times 2.5 = 2.2 \text{ सेमी}^3$$

तथा घनाकार गड्ढे का किनारा = 3 सेमी

$$\text{घन का आयतन} = a^3$$

$$= (3)^3 = 27 \text{ सेमी}^3$$

$$\text{पेन स्टैण्ड का आयतन} = l \times b \times h$$

$$= 10 \times 5 \times 4$$

$$= 200 \text{ सेमी}^3$$

सम्पूर्ण स्टैण्ड में प्रयुक्त लकड़ी का आयतन = पेन स्टैण्ड का आयतन - (शंक्वाकार गड्ढों का आयतन + घनाकार गड्ढे का आयतन)

$$= 200 - (2.2 + 27)$$

$$= 200 - 29.2$$

$$= 170.08 \text{ सेमी}^3$$

14. दिया है, एक गोदाम की आकृति आधार से

एक घनाभ के आकार में तथा उसका ऊपरी

भाग अर्द्ध बेलनाकार आकृति का है।

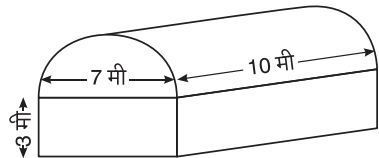
गोदाम की लम्बाई (l) = 10 मी

गोदाम की चौड़ाई (b) = 7 मी

गोदाम की ऊर्ध्वाधर दीवारों की ऊँचाई (h) = 3 मी

गोदाम के अर्द्धवृत्तीय भाग की त्रिज्या (r) = 3.5 मी

अब, गोदाम का आयतन



$$= \text{घनाभाकार आकृति का आयतन} + \text{अर्द्ध बेलनाकार आकृति का आयतन}$$

$$\begin{aligned}
 &= l \times b \times h + \frac{1}{2} \times \pi r^2 l \\
 &= 10 \text{ मी} \times 7 \text{ मी} \times 3 \text{ मी} + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (3.5 \text{ मी})^2 \times 10 \text{ मी} \\
 &= 210 \text{ मी}^3 + \frac{11}{7} \times 12.25 \text{ मी}^2 \times 10 \text{ मी} \\
 &= (210 + 11 \times 17.5) \text{ मी}^3 \\
 &= (210 + 192.5) \text{ मी}^3 \Rightarrow 402.5 \text{ मी}^3
 \end{aligned}$$

तथा गोदाम के फर्श को छोड़कर सम्पूर्ण अन्तः पृष्ठीय क्षेत्रफल

= अर्द्धबेलनाकार आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल + गोदाम की चारों दिवारों का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r(l+r) + 2 \times (l+b) \times h \\
 &= \pi r(l+r) + 2 \times (l+b) \times h \\
 &= \frac{22}{7} \times 3.5 \text{ मी} \times (10 \text{ मी} + 3.5 \text{ मी}) + 2 \times (10 \text{ मी} + 7 \text{ मी}) \times 3 \text{ मी} \\
 &= (22 \times 0.5) \text{ मी} \times 13.5 \text{ मी} + 6 \text{ मी} \times 17 \text{ मी} \\
 &= (11 \times 13.5) \text{ मी}^2 + 102 \text{ मी}^2 \\
 &= (148.5 + 102) \text{ मी}^2 \Rightarrow 250.5 \text{ मी}^2
 \end{aligned}$$

अतः गोदाम का आयतन 402.5 घन मी तथा फर्श को छोड़कर सम्पूर्ण अन्तः पृष्ठीय क्षेत्रफल 250.5 वर्ग मी है।

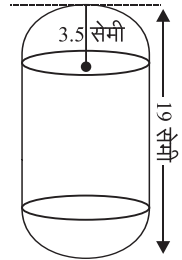
15. दिया है, एक ठोस बेलन को दो सिरे अर्द्धगोलाकार है।

ठोस की कुल ऊँचाई = 19 सेमी

तथा बेलन की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

∴ सम्पूर्ण ठोस का आयतन

$$\begin{aligned}
 &= \text{बेलन का आयतन} + \text{दो अर्द्धगोलाकार आकृतियों के आयतन} \\
 &= \pi r^2 h + 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left[h + \frac{4}{3} r \right] \\
 &= \frac{22}{7} \times (3.5 \text{ सेमी})^2 \times [(19 - 3.5 - 3.5) \text{ सेमी} + \frac{4}{3} \times 3.5 \text{ सेमी}] \\
 &= \frac{22}{7} \times 12.25 \text{ सेमी}^2 \times [12 \text{ सेमी} + \frac{14}{3} \text{ सेमी}] \\
 &= 22 \times 1.75 \text{ सेमी}^2 \times \left[\frac{36 + 14}{3} \right] \text{ सेमी} \\
 &= 38.5 \times \frac{50}{3} \text{ सेमी}^3 \\
 &= \frac{1925}{3} \text{ सेमी}^3 \text{ या } \frac{1925}{3} \text{ घन सेमी}
 \end{aligned}$$



∴ 1 घन सेमी ठोस का भार = 4.5 ग्राम

$$\therefore \frac{1925}{3} \text{ घन सेमी ठोस का भार} = \frac{1925}{3} \times 4.3 \text{ ग्राम}$$

$$= (1925 \times 1.5) \text{ ग्राम} = 2887.500 \text{ ग्राम}$$

अतः दिए गए ठोस का सम्पूर्ण भार कुल 2887.5 ग्राम है।

16. दिया है, एक ठोस एक लम्बवृत्ताकार बेलन तथा इसके दोनों सिरों पर उसी त्रिज्या के अर्द्धगोले से मिलकर बना है।

ठोस की कुल लम्बाई = 108 सेमी

तथा अर्द्धगोलीय सिरों का व्यास = 36 सेमी

$$\therefore \text{अर्द्धगोलीय सिरों की त्रिज्या } (r) = \frac{36}{2} \Rightarrow 18 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{तब, ठोस के बेलनाकार भाग की ऊँचाई } (h) &= 108 \text{ सेमी} - 18 \text{ सेमी} - 18 \text{ सेमी} \\ &= (108 - 36) \text{ सेमी} \Rightarrow 72 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

अब, सम्पूर्ण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल + दो अर्द्धगोलों का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(h + 2r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 18 \text{ सेमी} \times [72 \text{ सेमी} + 2 \times 18 \text{ सेमी}]$$

$$= \left(\frac{2 \times 396}{7} \right) \text{ सेमी} \times [72 + 36] \text{ सेमी} = \left[\frac{792}{7} \times 108 \right] \text{ सेमी}^2 = \frac{85536}{7} \text{ सेमी}^2$$

∴ पृष्ठ को रंगवाने की दर = 7 पैसे प्रति वर्ग सेमी

$$\therefore \frac{85536}{7} \text{ वर्ग सेमी पृष्ठ की रंगवाने का कुल व्यय} = \frac{85536}{7} \times 7 \text{ पैसे} = 85536 \text{ पैसे}$$

$$= ₹ \frac{85536}{100} \Rightarrow 855.36$$

अतः दिए गए ठोस के पृष्ठ को रंगवाने का कुल व्यय ₹ 855.36 होगा।

17. दिया है, एक ठोस बेलन को दो सिरे अर्द्धगोलाकार है।

ठोस की कुल ऊँचाई = 19 सेमी

तथा बेलन की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

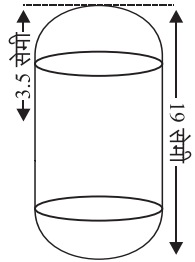
∴ सम्पूर्ण ठोस का आयतन

= बेलन का आयतन + दो अर्द्धगोलाकार आकृतियों के आयतन

$$= \pi r^2 h + 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left[h + \frac{4}{3} r \right]$$

$$= \frac{22}{7} \times (3.5 \text{ सेमी})^2 \times [(19 - 3.5 - 3.5) \text{ सेमी} + \frac{4}{3} \times 3.5 \text{ सेमी}]$$

$$= \frac{22}{7} \times 12.25 \text{ सेमी}^2 \times [12 \text{ सेमी} + \frac{14}{3} \text{ सेमी}]$$



$$= 22 \times 1.75 \text{ सेमी}^2 \times \left[\frac{36+14}{3} \right] \text{ सेमी}$$

$$= 38.5 \times \frac{50}{3} \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{1925}{3} \text{ सेमी}^3 \text{ या } \frac{1925}{3} \text{ घन सेमी}$$

अतः ठोस का आयतन $\frac{1925}{3}$ घन सेमी होगा।

अब, ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times$ अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2 \times (2\pi r^2) + 2\pi rh$$

$$= 4\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= 2\pi r (2r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 (2 \times 3.5 + 19 - 3.5 - 3.5)$$

$$= 110 \times 0.5 (7 + 12)$$

$$= 11 \times 5 \times 19$$

$$= 1045 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1045 वर्ग सेमी होगा।

विविध प्रश्नावली

1. (a) 2. (a) 3. (a) 4. (b) 5. (b) 6. (a) 7. (d) 8. (b)
9. (d)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (d) 2. (a) 3. (d) 4. (c)

चित्र आधारित प्रश्न

1. दिया गया है—

बेलनाकार गड्ढे की ऊँचाई (h) = 3 सेमी

तथा बेलनाकार गड्ढे की त्रिज्या (r) = 2 सेमी

तब बेलनाकार गड्ढे का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \pi (2)^2 (3) = 12\pi \text{ घन सेमी}$$

अतः बेलनाकार गड्ढे का आयतन 12π सेमी³ होगा।

2. दिया है—

घनाभ की लम्बाई (l) = 14 सेमी

घनाभ की चौड़ाई (b) = 17 सेमी

घनाभ की ऊँचाई (h) = 3 सेमी

$$\begin{aligned}\text{घनाभ को हरे रंग से रंगने के लिए उसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2(l+b) \times h \\ &= 2(14+17) \times 3 \\ &= 2 \times 31 \times 3 = 186 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

अतः घनाव का पार्श्व क्षेत्रफल 186 सेमी² होगा।

$$\begin{aligned}3. \text{ दिए हुए घनाभ का आयत} &= l \times b \times h \\ &= 14 \times 17 \times 3 = 714 \text{ सेमी}^3\end{aligned}$$

हमें ज्ञात है, एक बेलनाकार गड्ढे का आयत = 12π सेमी³

$$\begin{aligned}\text{तब 7, बेलनाकार गड्ढे का आयतन} &= 7 \times 12\pi \text{ सेमी}^3 \\ &= 7 \times 12 \times \frac{22}{7} = 264 \text{ सेमी}^3\end{aligned}$$

7 गड्ढे बनने के बाद, शेष घनाभ का आयतन = घनाभ का आयतन - 7 बेलनाकार गड्ढे का आयतन = $714 - 264 = 450$ सेमी³

अतः शेष घनाभ में लकड़ी का आयतन 450 सेमी³ होगा।

4. स्वयं करें।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (ii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (c) 2. (b) 3. (c) 4. (b)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(i)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iv)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. असत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. सत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. चित्र से यह देखा जा सकता है, कि नहर के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल घनाकार है।

$$\begin{aligned}\text{तब, अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल} &= 6 \times 1.5 \\ &= 9 \text{ मी}^2\end{aligned}$$

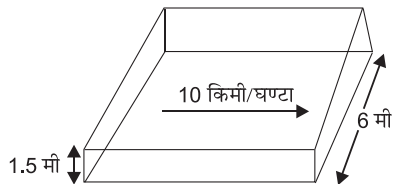
पानी की गति = 10 किमी/घंटा

$$= 10000/60 \text{ मी/मिनट}$$

नहर से 1 मिनट में बहने वाले पानी का आयतन = $9 \times 10000/60 = 1500 \text{ मी}^3$

नहर में 30 मिनट में बहने वाले पानी का आयतन = 30×1500

$$= 45000 \text{ मी}^3$$



30 मिनट तक 10 किमी/घंटा की गति से बहने वाले पानी की मात्रा, 8 सेमी खड़े वाले क्षेत्र A की सिंचाई के लिए आवश्यक पानी की मात्रा के समान होगी।

$$\text{तब } 4500 = A \times \frac{8}{100} \Rightarrow A = 562500 \text{ मी}^2$$

अतः 30 मिनट में सिंचित क्षेत्र 562500 वर्ग मीटर है।

2. यहाँ कुएँ का आकार बेलनाकार होगा।

कुएँ की गहराई $(h_1) = 14$ मी

कुएँ के वृत्ताकार सिरे की त्रिज्या $(r_1) = \frac{3}{2}$

मीटर

आकृति से, यह देखा जा सकता है कि हमारा बाँध एक बेलनाकार आकार में होगा जिसमें

बाहरी त्रिज्या $(r_2) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ मीटर और

आन्तरिक त्रिज्या $(R_1) = \frac{3}{2}$ मीटर होगी।

माना बाँध की ऊँचाई h_2 मीटर है।

अब, कुएँ से खोदी गई मिट्टी का आयतन = बाँध बनाने में प्रयुक्त मिट्टी का आयतन

$$\pi r_1^2 h_1 = \pi (r_2^2 - r_1^2) h_2$$

$$\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 14 = \pi \left[\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \times h_2$$

$$\frac{9}{4} \times 14 = \frac{112}{4} \times h_2$$

$$h_2 = \frac{9}{8} = 1.125 \text{ मीटर}$$

अतः बाँध की ऊँचाई 1.125 मीटर होगी।

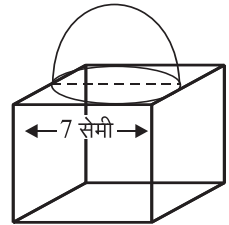
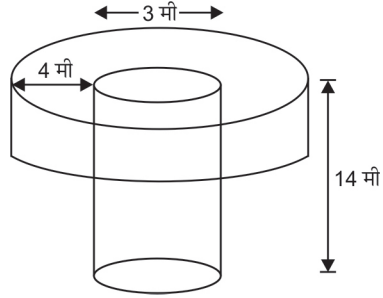
3. आकृति से, यह देखा जा सकता है कि इस तरह के गोलार्द्ध के लिए संभव सबसे बड़ा व्यास घन की भुजा के बराबर है, अर्थात् 7 सेमी।

अर्द्धगोलाकार भाग की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी

ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनीय भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोलाकार भाग का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल - अर्द्धगोलाकार भाग के आधार का क्षेत्रफल = $6 (\text{भुजा})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2 = 6 (\text{भुजा})^2 + \pi r^2$

$$\text{ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = 294 + 38.5 = 332.5 \text{ सेमी}^2$$

अतः ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 332.5 वर्ग सेमी होगा।



मूल्य आधारित प्रश्न

1. (b) दिया है—

बेलन की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = 18 सेमी

माना बने गोले की त्रिज्या R है।

हम जानते हैं, जब एक ठोस आकृति को दूसरी में ठोस आकृति में ढाला जाता है, तब आयतन समान रहता है।

∴ बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\pi (14)^2 (18) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\frac{16 \times 18 \times 3}{4} = R^3$$

$$\Rightarrow R^3 = 27 \times 8$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} \Rightarrow R = 3 \times 2 = 6 \text{ सेमी}$$

अतः बने गोले की त्रिज्या 6 सेमी होगी।

2. (a) हम जानते हैं—

गोले की त्रिज्या (R) = 6 सेमी

$$\begin{aligned} \text{तब, गोले का आयतन} &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^3 \\ &= \frac{4 \times 22 \times 216}{21} = 905.14 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

अतः गोले का आयतन 905.14 सेमी³ होगा।

3. (c) दी गयी शर्तों से—

$$\frac{\text{गोले का आयतन}}{\text{बेलन का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\pi r^2 h} = \frac{4}{3} \frac{R^3}{r^2 h} = \frac{4}{3} \times \frac{6 \times 6 \times 6}{4 \times 4 \times 18} = \frac{1}{1}$$

अतः गोले के आयतन व बेलन के आयतन में अनुपात 1 : 1 का होगा।

4. (a) दिया है—

बेलन की त्रिज्या $r = 4$ सेमी तथा ऊँचाई 18 सेमी है। तब,

बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4 (18 + 4)$$

$$= \frac{44}{7} \times 4 \times 22 = 553.14 \text{ सेमी}^2$$

अतः बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 553.14 सेमी² होगा।

5. (c) जब किसी ठोस आकृति को किसी दूसरी आकृति में परिवर्तित किया जाता है, तब उसका आयतन अपरिवर्तित रहता है।

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (d) दिया है—

जूस से भरे हुए बेलनाकार बर्तन की त्रिज्या (r) = 15 सेमी

बेलनाकार बर्तन में भरे जूस की ऊँचाई (h) = 32 सेमी

गिलास के बेलनाकार भाग की ऊँचाई (H) = 6 सेमी

तथा अर्द्धगोलाकार भाग की त्रिज्या (R) = 3 सेमी

प्रत्येक गिलास जूस का मूल्य ₹ 15 दिया गया है।

तब, बड़े बर्तन में जूस की मात्रा $= \pi r^2 h = (15)^2 \times 32 \times \pi = 7200 \pi$ सेमी³

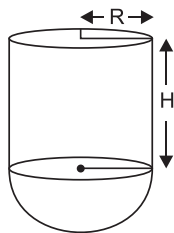
अतः बर्तन में जूस की मात्रा 7200π सेमी³ होगी।

2. (a) प्रत्येक छोटे गिलास का आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन + अर्द्धगोलाकार भाग का आयतन

$$= \pi r^2 H + \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi (3)^2 + (6) + \frac{2}{3} \pi (3)^3$$

$$= \pi (54 + 18) = 72 \pi$$

अतः प्रत्येक छोटे गिलास का आयतन 72π सेमी³ होगा।



3. (c) हम जानते हैं—

$$\text{बेचे गये जूस के गिलासों की संख्या} = \frac{\text{बड़े बर्तन में जूस की मात्रा}}{\text{प्रत्येक छोटे गिलास का आयतन}}$$

$$= \frac{7200 \pi}{72 \pi} = 100$$

अतः बेचे गये जूस के कुल गिलासों की संख्या 100 होगी।

4. (a) संपूर्ण जूस का विक्रय मूल्य = बेचे गये गिलासों की संख्या $\times$ प्रत्येक गिलास जूस का मूल्य $= 100 \times 15 = ₹ 1500$

अतः संपूर्ण जूस का कुल विक्रय मूल्य ₹ 1500 होगा।

5. (c) कुल जूस की मात्रा $= 7200 \pi$ सेमी³

$$\text{खराब जूस की मात्रा} = \frac{1}{4} \times 7200 \pi = 1800 \pi \text{ सेमी}^3$$

$$\text{शेष जूस की मात्रा} = 7200 \pi - 1800 \pi = 5400 \pi \text{ सेमी}^3$$

$$\text{अब, जूस के गिलासों की संख्या} = \frac{\text{बेचा गये कुल जूस की मात्रा}}{\text{एक गिलास जूस की मात्रा}} = \frac{5400 \pi}{72 \pi} = 75$$

दिया है—एक गिलास का मूल्य = ₹ 25

तब 75 गिलास का विक्रय मूल्य $= 25 \times 75 = ₹ 1875$



प्रश्नावली 13 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. कल्पित माध्य विधि से वर्गीकृत आकड़ों का माध्यम ज्ञात करने का सूत्र है—

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

जहाँ, A = कल्पित माध्य तथा d_i = विचलन

$$\Rightarrow d_i = x_i - A$$

2. पद विचलन विधि से वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने का सूत्र है—

$$\bar{x} = A + \left[\frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right] \times h$$

जहाँ, A = कल्पित माध्य, h = उच्च सीमा-निम्न सीमा तथा $u_i = \frac{d_i}{h} = \frac{x_i - A}{h}$

3. कथन सत्य नहीं हैं। इसका कारण यह है कि समूहीकृत आकड़ों के माध्य की गणना करते हैं। तो यह माना जाता है कि प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता वर्ग के मध्य-बिन्दु पर केंद्रित होती है। इस वजह से, माध्य के दो मान, अर्थात् अवर्गीकृत और समूहीकृत आँकड़ों के मान शायद ही कभी समान होते हैं।

4. समान्तर माध्य = $\frac{10 \text{ व्यक्तियों का भार योगफल}}{\text{उनकी कुल संख्या}}$

$$45.6 = \frac{\text{उनके भारों का योगफल}}{10} \quad 45.6 = \text{भारों का योगफल}$$

5. दिये गये आँकड़े हैं—

13, 17, 21, 28, 39, 23, 37, 49

आँकड़ों का माध्य = $\frac{\text{आँकड़ों का योगफल}}{\text{उनकी कुल संख्या}}$

$$= \frac{13+17+21+28+39+23+37+49}{8}$$

$$= \frac{227}{8}$$

$$= 28.375$$

6. 1 से 25 तक की अभाज्य संख्या = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

माध्य = $\frac{\text{सभी पदों के मानों का योगफल}}{\text{पदों की संख्या}}$

$$= \frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23}{9} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9} \text{ या } 11.11$$

7. दिया है $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ का समान्तर माध्य m है, तब

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = m$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n}{n} = \frac{k[x_1 + x_2 + \dots + x_n]}{n} = k \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

$$= km \text{ सिद्ध हुआ।}$$

8.

x	f	$x_i f_i$
5	4	20
6	8	48
7	14	98
8	11	88
9	3	27
योग	40	281

$$\text{बारम्बारता बंटन का माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{281}{40} = 7.025$$

9.

x_i	f_i	$f_i x_i$
19	13	247
21	15	315
23	16	368
25	18	450
27	16	432
29	15	435
31	13	403
योग	$\sum f_i = 106$	$\sum f_i x_i = 2650$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2650}{106} = 25$$

10.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$f_i x_i$
1-3	9	2	18
3-5	22	4	88
5-7	27	6	162
7-10	17	8.5	144.5
योग	$\Sigma f_i = 75$		$\Sigma f_i x_i = 412.5$

चरण I. मध्यमान निकालते हैं।

$$\text{मध्यमान } x_i = \frac{\text{वर्ग की उच्च सीमा} + \text{वर्ग की निम्न सीमा}}{2}$$

चरण II. मध्यमान (x_i) की उसके संगत वर्ग की बारम्बारता (f_i) से गुणा करते हैं।

चरण III. $\Sigma f_i x_i$ तथा Σf_i प्राप्त करते हैं।

चरण IV. अब, सूत्र $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\Sigma f_i}$ की सहायता से अभीष्ट समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।

$$\bar{x} = \frac{412.5}{75} = 5.5$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$f_i x_i$
10-15	5	12.5	62.5
15-20	6	17.5	105
20-25	8	22.5	180
25-30	12	27.5	330
30-35	6	32.5	195
35-40	3	37.5	112.5
योग	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 985$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{985}{40} \\ &= 24.625\end{aligned}$$

2.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	विचलन $di = x_i - A$	$f_i d_i$
100-120	10	110	-40	-4000
120-140	20	130	-20	-4000
140-160	30	150 (A)	0	0
160-180	35	170	20	700
180-200	5	190	40	200
योग	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i d_i = 100$

चरण I. वर्ग चिह्न (मध्यमान) = $\frac{\text{उच्च सीमा} + \text{निम्न}}{2}$

चरण II. कल्पित माध्य (A) से विचलन d_i ज्ञात करते हैं

d_i = पद का मान - कल्पित माध्य

$$d_i = x_i - A$$

यहा कल्पित माध्य (A) = 150 तब d_i ज्ञात करेंगे।

चरण III. प्रत्येक विचलन (d_i) की उसकी संगत बारम्बारता (f_i) से गुणा करते हैं।

चरण IV. गुणनफलों का योग $\Sigma f_i d_i$ तथा सभी बारम्बारताओं का योग Σf_i ज्ञात करते हैं।

$$\bar{x} = \frac{A + \sum_{i=1}^n f_i d_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

चरण V.

$$\bar{x} = 150 + \frac{100}{100}$$

$$x = 150 + 1 = 151$$

3.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता	मध्यमान x_i	विचलन $d_i = x_i - A$	$u_i = \frac{x_i - A}{n}$	$f_i u_i$
0-30	12	15	-90	-3	-36
30-60	21	45	-60	-2	-42
60-90	34	75	-30	-1	-34
90-120	52	105 (A)	0	0	0
120-150	20	135	30	1	20
150-180	11	165	60	2	22
योग	$\Sigma f_i = 150$				$\Sigma f_i u_i = -700$

चरण I. मध्यमान = $\frac{\text{उच्च सीमा} + \text{निम्न}}{2}$

चरण II. विचलन $d_i = x_i - A$ ज्ञात करते हैं।

माना $A = 105$ है।

चरण III. वर्ग माप ($h = \text{उच्च सीमा} - \text{निम्न सीमा}$) लेकर निम्न सूत्र द्वारा u_i ज्ञात करते हैं—

$$u_i = \frac{d_i}{h} = \frac{x_i - A}{h}$$

वर्ग माप $h = 30 - 0 = 30$

चरण IV. u_i के प्रत्येक वर्ग की संगत बारम्बारता f_i से गुणा करके $f_i u_i$ ज्ञात करते हैं।

चरण V. प्राप्त $f_i u_i$ का योगफल $\Sigma f_i u_i$ तथा बारम्बारताओं का योगफल Σf_i ज्ञात करते हैं।

चरण VI. अब, सूत्र $\bar{x} = A \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h$ से

$$\bar{x} = 105 + \left(\frac{-70}{150} \right) \times 30$$

$$\bar{x} = 105 + \left(\frac{-70}{5} \right)$$

$$105 - 14 = 91$$

4.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
1-3	18	2	-4	-72
3-5	25	4	-2	-50
5-7	27	6 (A)	0	0
7-9	30	8	2	60
योग	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i d_i = 62$

$$\text{माध्य} = \frac{A + \Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$= 6 + \left(\frac{-62}{100} \right)$$

$$= \frac{600 - 62}{100}$$

$$= \frac{538}{100} = 5.38$$

5.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$f_i x_i$
0-10	8	5	40
10-20	12	15	180
20-30	10	25	250
30-40	11	35	385
40-50	9	45	405
योग	$\Sigma f_i = 50$		$\Sigma f_i x_i = 1260$

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1260}{50} = 25.2$$

6.

साक्षरता दर (%) में	नगरों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 70$	$u_i = \frac{d_i}{h}$	$f_i u_i$
45-55	5	50	-20	-2	-10
55-65	10	60	-10	-1	-10
65-75	11	70 (A)	0	0	0
75-85	8	80	10	1	8
85-95	6	90	20	2	12
योग	$\Sigma f_i = 40$				$\Sigma f_i u_i = 0$

$$\Sigma f_i = 40, \Sigma f_i u_i = 0$$

$$\text{माध्य} = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h$$

$$\bar{x} = 70 + \left(\frac{0}{40} \right) \times 10$$

$$\bar{x} = 70$$

अतः 70% साक्षरता दर है।

7.

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	महिलाओं की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 75.5$	$u_i = \frac{d_i}{3}$	$f_i u_i$
65-68	2	66.5	-9	-3	-6
68-71	4	69.5	-6	-2	-8
71-74	3	72.5	-3	-1	-3
74-77	8	75.5	0	0	0
77-80	7	78.5	3	1	7
80-83	4	81.5	6	2	8
83-86	2	84.5	9	3	6
योग	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 4$

$$\Sigma f_i = 30, \Sigma f_i u_i = 4$$

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h = 75.5 + \left(\frac{4}{30} \right) \times 3 = 75.5 + 0.4 = 75.9$$

8.	वर्ग-अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	बारम्बारता	7	14	28	26	16	9

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	वर्ग-चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
0-10	7	$\frac{0+10}{2} = 5$	35
10-20	14	$\frac{10+20}{2} = 15$	210
20-30	28	$\frac{20+30}{2} = 25$	700
30-40	26	$\frac{30+40}{2} = 35$	910
40-50	16	$\frac{40+50}{2} = 45$	720
50-60	9	$\frac{50+60}{2} = 55$	495
योग	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma f_i x_i = 3070$

$$\therefore \text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{3070}{100} = 30.70$$

9.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
10-15	5	12.5	-15	-3	62.5	-75	-15
15-20	6	15.5	-10	-2	105	-60	-12
20-25	8	22.5	-5	-1	180	-40	-8
25-30	12	27.5	0	0	330	0	0
30-35	6	32.5	5	1	195	30	6
35-40	4	37.5	10	2	150	40	8
योग	41				1022.5	-105	-21

$$\therefore \text{सामान्तर माध्य } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

$$= 27.5 + \left(\frac{-21}{41} \right) \times 5 = 27.5 - \frac{105}{41} = 27.5 - 2.56 = 24.94$$

10.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 300$	$f_i x_i$	$f_i d_i$
50-150	16	100	-200	1600	-3200
150-250	12	200	-100	2400	-1200
250-350	10	300	0	3000	0
350-450	12	400	100	4800	1200
450-550	7	500	200	3500	1400
योग	57			15300	-1800

$$\therefore \text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$= 300 + \frac{(-1800)}{57} = 300 - \frac{600}{19}$$

$$= \frac{5700 - 600}{19} = \frac{5100}{19} = 268.42$$

11.

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 35$	$u_i = \frac{x_i - 35}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
0-10	12	5	-30	-3	60	-360	-36
10-20	18	15	-20	-2	270	-360	-36
20-30	27	25	-10	-1	675	-270	-27
30-40	20	35	0	0	700	0	0
40-50	17	45	10	1	765	170	17
50-60	6	55	20	2	330	120	12
योग	100				2800	-700	-70

$$\therefore \text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

$$= 35 + \left(\frac{-70}{100} \right) \times 10 = 35 - \frac{700}{100} = 35 - 7 \Rightarrow 28$$

12.	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	x_i	$f_i x_i$
	0-10	3	5	15
	10-20	A	15	$15A$
	20-30	6	25	150
	30-40	10	35	350
	40-50	5	45	225
	योग	$24 + A$		$740 + 15A$

∴ दिया है, समान्तर माध्या (x) = 25

$$\text{तथा } x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\therefore 25 = \frac{740 + 15A}{24 + A}$$

$$25 \times (24 + A) = 740 + 15A$$

$$600 + 25A = 740 + 15A$$

$$25A - 15A = 740 - 600$$

$$10A = 140$$

$$A = \frac{140}{10} = 14$$

अतः A का मान 14 है।

प्रश्नावली 13 B

1. **बहुलक**—किसी समूह में जिस आँकड़े अथवा पद की बारम्बारता अधिकतम होती है, वह पद 'बहुलक' कहलाता है।
2. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने का सूत्र है—

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

जहाँ, l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

h = वर्ग अन्तराल की माप

f_1 = बहुलक वर्ग को बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद की बारम्बारता

3. (i) 10, 13, 17, 19, 12, 15, 19, 20, 19, 17 को आरोही क्रम में लिखेंगे—
10, 12, 13, 15, 17, 17, 19, 19, 19, 20

अतः जो सबसे अधिक बार आया या जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है, वह बहुलक होता है इसलिए यहाँ बहुलक 19 है।

(ii) 23, 14, 10, 12, 11, 12, 23, 20, 18, 12, 10, 12, 23

आरोही क्रम = 10, 10, 11, 12, 12, 14, 18, 20, 23, 23, 23

अतः बहुलक 23 है।

4. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3

इसका बहुलक 2 विकेट है।

5. 5 की बारम्बारता सर्वाधिक है

क्योंकि वह 7 बार आया है।

अतः बहुलक 5 है।

6. 110, 120, 130, 120, 118, 140, 130, 120, 140, 120

बहुलक = 120

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.	वर्ग अन्तराल	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
	बारम्बारता	4	8	15	20	5	4

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 20 है,
तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (40-50) है।

अतः बहुलक का वर्ग (40-50) है।

अब, बहुलक वर्ग = 40-50

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 40

वर्ग माप (h) = 50-40 = 10

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 20

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 15

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 5

$$\therefore \text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 40 + \left[\frac{20 - 15}{2 \times 20 - 15 - 5} \right] \times 10$$

$$= 40 + \frac{5}{20} \times 10 = 40 + 2.5 = 42.5$$

2.	वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
	बारम्बारता	2	18	45	35	20	6	3

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 45 है तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (20-30) है।

अब, बहुलक वर्ग = 20-30

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 20

वर्ग माप (h) = 30-20 = 10

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 45

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 18

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 35

$$\begin{aligned}\therefore \text{ बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 20 + \left(\frac{45 - 18}{2 \times 45 - 18 - 35} \right) \times 10 \\ &= 20 + \frac{27 \times 10}{90 - 53} = 20 + \frac{270}{37} \\ &= 20 + 7.3 = 27.3\end{aligned}$$

3. वर्ग अन्तराल	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75
बारम्बारता	2	3	5	10	7

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 10 है, तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (45-60) है।

$$\therefore \text{ बहुलक वर्ग} = (45 - 60)$$

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 45

वर्ग माप (h) = $60 - 45 = 15$

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 10

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 5

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 7

$$\begin{aligned}\text{अतः बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 45 + \left(\frac{10 - 5}{2 \times 10 - 5 - 7} \right) \times 15 \\ &= 45 + \frac{5 \times 15}{20 - 12} = 45 + \frac{75}{8} \\ &= 45 + 9.375 = 54.375\end{aligned}$$

4. वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	4	4	7	10	12	8	5

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 12 है।

तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (40-50) है।

$$\therefore \text{ बहुलक वर्ग} = (40 - 50)$$

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 40

वर्ग माप (h) = $50 - 40 = 10$

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 12

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 10

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 8

$$\begin{aligned}
 \text{अतः बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\
 &= 40 + \left(\frac{12 - 10}{2 \times 12 - 10 - 8} \right) \times 10 = 40 + \frac{2 \times 10}{24 - 18} \\
 &= 40 + \frac{10}{3} = \frac{120 + 10}{3} = \frac{130}{3} = 43.33
 \end{aligned}$$

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 35$	$u_i = \frac{d_i}{10}$	$x_i u_i$
0-10	4	5	-30	-3	-12
10-20	4	15	-20	-2	-80
20-30	7	25	-10	-1	-7
30-40	10	35	0	0	0
40-50	12	45	10	1	12
50-60	8	55	20	2	116
60-70	5	65	30	3	105
योग	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma f_i u_i = 16$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः माध्य } (\bar{x}) &= a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h \\
 &= 35 + \left(\frac{16}{50} \right) \times 10 \\
 &= 35 + 3.2 = 38.2
 \end{aligned}$$

यहाँ अधिकतम बारम्बारता 12 है, तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (40-50) है।

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 40

वर्ग माप (h) = 50 - 40 = 10

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 12

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 10

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 8

$$\begin{aligned}
 \text{अतः बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\
 &= 40 + \left(\frac{12 - 10}{2 \times 12 - 10 - 8} \right) \times 10 = 40 + \frac{20}{6} \\
 &= 40 + 3.33 = 36.67
 \end{aligned}$$

5.	कृषि योग्य भूमि स्वामित्व का साइज (h_a)	परिवारों की संख्या
	0-5	10
	5-10	15
	10-15	30
	15-20	80
	20-25	40
	25-30	20
	30-35	5

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 80 है, तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (15-20) है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = (15-20)

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 15

वर्ग माप (h) = 20-15 = 5

बहुलक वर्ग की बारम्बारता (f_1) = 80

बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता (f_0) = 30

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता (f_2) = 40

अतः बहुलक = $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 15 + \left(\frac{80 - 30}{2 \times 80 - 30 - 40} \right) \times 5 h_a$

$$= 15 + \frac{50 \times 5}{160 - 70} h_a = 15 + \frac{250}{90}$$

$$= 15 + 2.78 = 17.78 h_a$$

6.	भार (g में)	पैकेटों की संख्या
	200-201	12
	201-202	26
	202-203	20
	203-204	9
	204-205	2
	205-206	1

यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 26 है, तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग (201-202) है

$$\therefore \text{ बहुलक वर्ग } = (201-202)$$

$$\text{बहुलक वर्ग की निम्न सीमा } (l) = 201$$

$$\text{तथा वर्ग की माप } (h) = 202 - 201 = 1$$

$$\text{बहुलक वर्ग की बारम्बारता } (f_1) = 26$$

$$\text{बहुलक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता } (f_0) = 12$$

$$\text{तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता } (f_2) = 20$$

$$\begin{aligned} \text{अतः बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h = 201 + \left(\frac{26 - 12}{2 \times 26 - 12 - 20} \right) \times 1 \\ &= 201 + \frac{14 \times 1}{52 - 32} \\ &= 201 + 0.7 = 201.7 \end{aligned}$$

7.

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
10-20	14
20-30	13
30-40	12
40-50	20
40-60	11
60-70	15

$$\text{यहाँ अधिकतम बारम्बारता} = 20$$

$$\therefore \text{ बहुलक वर्ग } = 40-50$$

$$l = 40$$

$$(\text{बहुलक वर्ग की निम्न सीमा})$$

$$h = 50 - 40 = 10$$

$$f_1 = 20, f_0 = 12, f_2 = 11$$

$$\begin{aligned} \text{तथा बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 40 + \left(\frac{20 - 12}{40 - 12 - 11} \right) \times 10 = 40 + \left(\frac{8}{40 - 23} \right) \times 10 \\ &= 40 + \frac{80}{17} = \frac{680 + 80}{17} = \frac{760}{17} = 44.7 \end{aligned}$$

8.

भूमि का क्षेत्रफल (हेक्टेयर में)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
परिवारों की संख्या	20	45	80	55	40	12

यहाँ अधिकतम बारम्बारता 80 है

∴ बहुलक वर्ग = 5-7, $l = 5$

$$h = 7 - 5 = 2$$

$$f_1 = 80, f_0 = 45, f_2 = 55$$

$$\text{तथा बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 5 + \left(\frac{80 - 45}{160 - 45 - 55} \right) \times 2 = 5 + \left(\frac{35}{60} - 100 \right) \times 2$$

$$= 5 + \left(\frac{35}{60} \right) \times 2 = 5 + \frac{35}{30} = \frac{150 + 35}{30} = \frac{185}{30} = 6.167 \text{ हेक्टेयर}$$

प्रश्नावली 13 C

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, आरोही क्रम में व्यवस्थित 14 प्रेक्षकों में से सातवें तथा आठवें प्रेक्षकों का मान 17 और 18 हैं।

∴ पदों की संख्या (n) = 14 (सम)

$$\begin{aligned} \therefore 14 \text{ प्रेक्षकों की माध्यिका} &= \frac{\left(\frac{n}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद}}{2} \\ &= \frac{7 \text{वाँ पद} + 8 \text{वाँ पद}}{2} = \frac{17 + 18}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow 12.5 \end{aligned}$$

2. अवगीकृत आँकड़ों का माध्यक इन्हीं आँकड़ों का वर्गीकृत करने के बाद परिकलित माध्यक सदैव बराबर नहीं होते हैं।

क्योंकि समूहीकृत आँकड़ों के मध्य की गणना करते हैं, तो यह माना जाता है कि प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता वर्ग के मध्य-बिन्दु पर केन्द्रित होती है। इस वजह से माध्य के दो मान, अर्थात् अवगीकृत और समूहीकृत आँकड़ों के मान शायद ही कभी समान होते हैं।

3. वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने का सूत्र है—

$$\text{माध्यिका} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right]$$

जहाँ, l = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा,

n = प्रेक्षकों की संख्या,

cf = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता,

f = माध्यम वर्ग की बारम्बारता

तथा h = वर्ग माप (यह मानते हुए की वर्ग माप बराबर है)

4. नहीं, दिये हुए वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्यक वर्ग और बहुलक वर्ग सदैव भिन्न नहीं होंगे। वे समान भी हो सकते हैं।
5. दिए हुए वर्गीकृत आँकड़ों के माध्यम, बहुलक और माध्यक सदैव भिन्न नहीं होते हैं। क्योंकि ये तीनों मान किसी विशेष आँकड़ों के लिए बराबर भी हो सकते हैं। यह उन आँकड़ों पर निर्भर करता है।

6. दिया है, कुछ आँकड़ों का माध्य = 14

तथा आँकड़ों का माध्यक = 15

$$\begin{aligned}\therefore \quad \text{बहुलक} &= 3 (\text{माध्यिका}) - 2 (\text{माध्य}) \\ &= 3 \times 15 - 2 \times 14 \\ &= 45 - 28 \\ &= 17\end{aligned}$$

अतः आँकड़ों का बहुलक 17 है।

7. (i) 715, 724, 725, 710, 729, 745, 694, 699, 696, 712, 734, 728, 716, 705, 719

उक्त आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर-

694, 696, 699, 705, 710, 712, 715, 716, 719, 724, 725, 728, 729, 734, 745

यहाँ पदों की संख्या $(n) = 15$ (विषम)

$$\text{मध्य पद} = \frac{n+1}{2} \text{ वाँ पद} = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2}$$

$$= 8 \text{ वाँ पद}$$

अतः माध्यिका = 8 वें पद का मान 716 है।

- (ii) 24, 25, 10, 29, 45, 12, 34, 28, 16, 05

दिए गए प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर-

5, 10, 12, 16, 24, 25, 28, 29, 34, 35

यहाँ पदों की संख्या $n = 10$ (सम)

$$\therefore \text{मध्य-पद} = \frac{n}{2} \text{ वाँ पद तथा } \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद}$$

$$= \frac{10}{2} \text{ वाँ पद तथा } \left(\frac{10}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद}$$

$$= 5 \text{ वाँ पद तथा } 6 \text{ वाँ पद}$$

$$\text{अतः माध्यिका} = \frac{5 \text{ वें पद का मान} + 6 \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{24 + 25}{2}$$

$$= \frac{49}{2} = 24.5$$

8. दिए गए चरों को आरोही क्रम में लिखने पर—

चर	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
3	6	6
5	1	7
7	8	15
8	4	19
9	8	27
10	3	30
12	6	36

यहाँ $n = 36$ (सम)

मध्य-पद $= \left(\frac{N}{2}\right)$ वाँ पद तथा $\left(\frac{N}{2} + 1\right)$ वाँ पद

$$= \frac{36}{2} \text{ वाँ पद } \left(\frac{36}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद}$$

$$= 18 \text{ वाँ पद } 19 \text{ वाँ पद}$$

$$\text{अतः माध्यक} = \frac{18 \text{ वाँ पद का मान} + 19 \text{ वाँ पद का मान}}{2}$$

$$\therefore \text{ माध्यक} = \frac{8+8}{2} = 8$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1.

भार (किग्रा में)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता (cf)
45	5	5
50	8	13
55	10	23
60	11	34
65	17	51

यहाँ, कुल पदों की संख्या $N = 51$ (विषम)

$$\therefore \text{ मध्य पद } = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वाँ पद } = \frac{51+1}{2}$$

$$= \frac{52}{2} = 26 \text{ वाँ पद}$$

$$\therefore \text{ माध्यिका} = 26 \text{ वें पद का मान} = 60 \text{ किग्रा}$$

2.

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	संचयी बारम्बारता
33	2	2
34	3	5
35	4	9
36	5	14
37	1	15

$N = 15$ (विषम)

$$\text{मध्य पद} = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8 \text{ वाँ पद}$$

माध्यिका = 35

3.

हृदय का व्यास मिमी में	व्यक्तियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
120	5	5
121	9	14
122	14	28
123	8	36
124	5	41
125	9	50

$N = 50$ (सम)

$$\begin{aligned} \text{मध्य-पद} &= \left(\frac{N}{2}\right) \text{ वाँ पद तथा } \left(\frac{N}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद} \\ &= \left(\frac{50}{2}\right) \text{ वाँ पद तथा } \left(\frac{50}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद} \end{aligned}$$

$$= 25 \text{ वाँ पद तथा } 26 \text{ वाँ पद}$$

$$\text{अतः माध्यक} = \frac{25 \text{ वें पद का मान} + 26 \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{122 + 122}{2}$$

$$= 122 \text{ मिमी}$$

4.

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
80-90	9	9
90-100	17	26
100-110	19	45
110-120	45	90
120-130	33	123
130-140	15	138
140-150	12	150
150-160	0	150
कुल	150	

$$N = 150$$

$$= \frac{N}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$l = 110, f = 45, cf = 45$$

$$h = 10$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यक} &= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h \\ &= 110 + \left(\frac{75 - 45}{45}\right) \times 10 \\ &= 110 + \left(\frac{30}{45}\right) \times 10 = 110 + \frac{30 \times 2}{9} \\ &= 110 + \frac{60}{9} = \frac{990 + 60}{9} = \frac{1050}{9} = 116.66 \end{aligned}$$

5.

आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
0-10	2	2
10-20	25	27
20-30	x	$27 + x$
30-40	18	$45 + x$
40-50	7	$52 + x$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{52+x}{2} - 27\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \left(\frac{52+x-54}{2x}\right) \times 10$$

$$8x = -20 + 10x + 2x = +20$$

$$x = 10$$

6.

वर्ग-अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
0-10	2	2
10-20	3	5
20-30	x	$5+x$
30-40	6	$11+x$
40-50	5	$16+x$
50-60	3	$19+x$
60-70	2	$21+x$

$$\text{माध्य} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$35 = 30 + \frac{\left(\frac{21+x}{2} - (5+x)\right)}{6} \times 10$$

$$5 = \frac{21+x-2(5+x)}{12} \times 10$$

$$60 = (21+x-10-2x) \times 10$$

$$6 = 11 - x$$

$$x = 11 - 6$$

$$x = 5$$

7.

आयु वर्ग (वर्षों में)	महिलाओं की संख्या (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
0 - 10	2	2
10 - 20	3	5
20 - 30	4	9
30 - 40	5	14
40 - 50	4	18
50 - 60	2	20
योग	$\Sigma(f) = 20$	

यहाँ, पदों की संख्या $n = 20$

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

10वाँ पद, संयमी बारम्बारता 14 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (30-40) है।

$$\therefore \text{माध्यक वर्ग} = (30-40)$$

$$\text{माध्यक वर्ग की निम्न सीमा } (l) = 30$$

$$\text{माध्यम वर्ग की बारम्बारता } (f) = 5$$

$$\text{माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता } (cf) = 9$$

$$\text{वर्ग माप या वर्ग अन्तराल } (h) = 40 - 30 = 10$$

$$\text{अतः माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h = 30 + \left(\frac{\frac{20}{2} - 9}{5} \right) \times 10$$

$$= 30 + (10 - 9) \times 2 = 30 + 2 = 32 \text{ वर्ष}$$

8.	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
	1-3	6	6
	3-5	53	59
	5-7	85	144
	7-9	65	209
	9-11	21	230
	11-13	16	246
	13-15	4	250
	15-17	4	254

यहाँ, पदों की संख्या (n) = 254

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{254}{2} = 127$$

127 वाँ पद, संयमी बारम्बारता 144 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (5-7) है।

$$\therefore \text{माध्यम वर्ग} = (5-7)$$

$$\text{माध्यक वर्ग की निम्न सीमा } (l) = 5$$

$$\text{माध्यक वर्ग की बारम्बारता } (f) = 85$$

$$\text{माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता } (cf) = 59$$

$$\text{तथा वर्ग अन्तराल } (h) = 7 - 5 = 2$$

$$\begin{aligned}\text{अतः माध्यिका} &= l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 5 + \left(\frac{\frac{254}{2} - 59}{85} \right) \times 2 \\ &= 5 + \frac{(127 - 59) \times 2}{85} = 5 + \frac{68}{85} \times 2 = 5 + \frac{8}{5} = 5 + 1.6 = 6.6\end{aligned}$$

9.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
10-15	5	5
15-20	6	11
20-25	10	21
25-30	15	36
30-35	9	45
35-40	5	50

यहाँ, पदों की संख्या (n) = 50

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

25 वाँ पद, संयमी बारम्बारता 36 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (25-30) है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = (25-30)

माध्यक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 25

माध्यक वर्ग की बारम्बारता (f) = 15

माध्यक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता (cf) = 21

तथा वर्ग अन्तराल (h) = 30 - 25 = 5

$$\begin{aligned}\text{अतः माध्यिका} &= l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 25 + \frac{\frac{50}{2} - 21}{15} \times 5 \\ &= 25 + \frac{4}{3} = \frac{75 + 4}{3} = \frac{79}{3} = 26.33\end{aligned}$$

10.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
0-10	5	5
10-20	12	17
20-30	15	32
30-40	10	42
40-50	8	50

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 50$

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

25 वाँ पद, संयमी बारम्बारता 32 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (20-30) है।

$$\therefore \text{माध्यक वर्ग} = (20-30)$$

$$\text{माध्यक वर्ग की निम्न सीमा } (l) = 20$$

$$\text{माध्यक वर्ग की बारम्बारता } (f) = 15$$

$$\text{माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता } (cf) = 17$$

$$\text{तथा वर्ग अन्तराल } (h) = 30 - 20 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{अतः माध्यिका} &= l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 20 + \frac{\frac{50}{2} - 17}{15} \times 10 \\ &= 20 + \frac{(25 - 17)}{3} \times 10 = 20 + \frac{16}{3} \\ &= 20 + 5.33 = 25.33 \end{aligned}$$

11.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
0-10	9	9
10-20	8	17
20-30	12	29
30-40	5	34
40-50	3	37

यहाँ, पदों की संख्या $(n) = 37$

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{37}{2} = 18.5$$

18.5 संयमी बारम्बारता 29 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (20-30) है।

$$\therefore \text{माध्यक वर्ग} = (20-30)$$

$$\text{माध्यक वर्ग की निम्न सीमा } (l) = 20$$

$$\text{माध्यक वर्ग की बारम्बारता } (f) = 12$$

$$\text{माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता } (cf) = 17$$

$$\text{तथा वर्ग अन्तराल } (h) = 30 - 20 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{अतः माध्यिका} &= l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 20 + \frac{\frac{37}{2} - 17}{12} \times 10 \\ &= 20 + \left(\frac{37 - 34}{2 \times 12} \right) \times 10 = 20 + \frac{30}{24} = \frac{80 + 5}{4} = \frac{85}{4} = 21.25 \end{aligned}$$

12.	प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संयमी बारम्बारता (cf)
	10-15	5	5
	15-20	8	13
	20-25	16	29
	25-30	23	52
	30-35	10	62
	35-40	8	70

यहाँ, पदों की संख्या (n) = 70

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

35 वाँ पद, संयमी बारम्बारता 52 में सम्मिलित है, जिसका संगत वर्ग (25-30) है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = (25-30)

माध्यक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 25

माध्यमक वर्ग की बारम्बारता (f) = 23

माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयमी बारम्बारता (cf) = 29

तथा वर्ग अन्तराल (h) = 30 - 25 = 5

$$\begin{aligned}
 \text{अतः} \quad \text{माध्यिका} &= l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h \\
 &= 25 + \frac{\frac{70}{2} - 29}{23} \times 5 \\
 &= 25 + \frac{6 \times 5}{23} = \frac{575 + 30}{23} \\
 &= \frac{605}{23} = 26.3
 \end{aligned}$$

13.

ऊँचाई (सेमी में)	लड़कियों की संख्या	संचयी बारम्बारता
135-140	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

$n = 51$ विषम है

$$\frac{n-11}{2} \text{ वाँ पद } \frac{52}{2} = 26 \text{ वाँ पद}$$

$$l = 145, N = 51, f = 18, cf = 11, h = 5 \text{ माध्यिका} = \frac{l + \left(\frac{N}{2} - cf \right)}{f} \times h$$

$$= 145 + \frac{\left(\frac{51}{2} - 11 \right)}{18} \times 5 = 145 + \left(\frac{51 - 22}{2 \times 18} \right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{29 \times 5}{36}$$

$$= 145 + \frac{145}{36} = \frac{5220 + 145}{36} = 149.02 \text{ सेमी}$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (c) 2. (c) 3. (d) 4. (c) 5. (b) 6. (c) 7. (a) 8. (d)
9. (d) 10. (c)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (c) 2. (a) 3. (d) 4. (a)

चित्र आधारित प्रश्न

टोल टैक्स (₹ में)	वाहनों की संख्या (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$d_i = x_i - A$	$f_i \cdot d_i$
30-40	80	35	- 20	- 700
40-50	100	45	- 10	- 450
50-60	120	55 (A)	0	0
60-70	70	65	10	650
70-80	40	75	20	1500
	$\Sigma f_i = 420$			$\Sigma f_i d_i = 1000$

1. दिए गए पदों के मानों के मध्य में आने वाली किसी संख्या को कल्पित माध्य (A) मान लेते हैं। यहाँ कल्पित माध्य (A) = 55 है।
2. $d_i x_i$ से कल्पित माध्य (A) के विचलन को प्रदर्शित करता है। अतः यहाँ न्यूनतम विचलन $d_i = 0$ होगा।

$$\begin{aligned}
 3. \text{ टोल टैक्स का माध्य} &= A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \\
 &= 55 + \frac{1000}{420} \\
 &= 55 + 2.38 \\
 &= 57.38
 \end{aligned}$$

अतः NAHI द्वारा प्राप्त टोल टैक्स का माध्य 57.38 होगा।

4. छात्र स्वयं करें।

कूट आधारित प्रश्न

1. (iv) 2. (iii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (d) 2. (b) 3. (b) 4. (d)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(iii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(iii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. 50 से मापित n मानों के एक समुच्चय के विचलनों का योगफल $= -10$ तब

$$\begin{aligned}
 (x_1 - 50) + (x_2 - 50) + \dots (x_n - 50) &= -10 \\
 (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n) - (50 + 50 + 50 + \dots n \text{ बार}) &= -10 \\
 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n) - 50n &= -10 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n &= -10 + 50n \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः

$$\begin{aligned}
 (x_1 - 46) + (x_2 - 46) + (x_3 - 46) + \dots (x_n - 46) &= 70 \\
 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n) - (46 + 46 + 46 + \dots n \text{ बार}) &= 70 \\
 (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n) - 46n &= 70 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n &= 70 + 46n \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

समी (1) व (2) से,

$$\begin{aligned}
 -10 + 50n &= 70 + 46n \\
 4n &= 80 \Rightarrow 70 + 46n \\
 4n &= 80 \Rightarrow n = 20
 \end{aligned}$$

∴ अभीष्ट माध्य

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{n} \\ \bar{x} &= \frac{-10 + 50n}{n} && \text{(समी (1) से)} \\ \bar{x} &= \frac{-10 + 50 \times 20}{20} && [\because n = 20] \\ \bar{x} &= \frac{990}{20} \Rightarrow \bar{x} = 49.5\end{aligned}$$

अतः n का मान 20 तथा माध्य का मान 49.5 होगा।

2. इन प्रश्न में हमें दिये माध्य और बारम्बारता का उपयोग करके x और y के मान ज्ञात करते हैं। बारम्बारता का योग 50 है। तब,

$$\begin{aligned}4 + 7 + x + 12 + y + 9 &= 50 \\ x + y &= 50 - (4 + 7 + 12 + 9) \\ x + y &= 50 - 32 = 18 \\ x + y &= 18 && \dots(1)\end{aligned}$$

इस बारम्बारता का माध्य 132 दिया हुआ है, तब

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	x_i	$f_i x_i$
0-10	4	20	80
40-80	7	60	420
80-120	x	100	$100x$
120-160	12	140	1680
160-200	y	180	$180y$
200-240	9	220	1980
	$\Sigma f_i = 50$		$\Sigma f_i x_i = 4160 + 100x + 180y$

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्य} &= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} \\ 32 &= \frac{4160 + 100x + 180y}{50} \\ 330 &= 208 + 5x + 9y \\ \Rightarrow 5x + 9y &= 122 && \dots(2)\end{aligned}$$

समी (1) में 5 से गुणा करने पर,

$$5x + 5y = 90 \quad \dots(3)$$

समी (2) में से (3) घटाने पर,

$$5x + 9y - 5x - 5y = 32$$

$$4y = 32 \Rightarrow y = 8$$

$\therefore y = 8$, समी (1) में रखने पर,

$$x + 8 = 18$$

$$\Rightarrow x = 10$$

अतः x का मान 10 तथा y का मान 8 होगा।

3. दिए गए बारम्बारता बंटन की माध्यिका 24 है। तब,

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	संचयी बारम्बारता ($c.f.$)
0-10	2	2
10-20	25	27
20-30	x	$27+x$
30-40	18	$45+x$
40-50	7	$52+x$

दिया है, माध्यिका 24 है। तब, 20-30 माध्यिका वर्ग होगा।

यहाँ, व्यक्ति की संख्या $52+x$ है, तब

$$\frac{N}{2} = \frac{52+x}{2}$$

निम्न सीमा $l = 20$, $f = x$, $c.f. = 27$

वर्ग की चौड़ाई (h) = $30 - 20 = 10$ तब,

$$\text{माध्यिका} = \frac{l + \left(\frac{N}{2} - c.f. \right)}{f} \times h$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{52+x}{2} - 27 \right)}{x} \times 10$$

$$4 = \left(\frac{52+x-54}{2x} \right) \times 10$$

$$8x = (x-2) \times 10$$

$$8x = 10x - 20$$

$$2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

अतः x का मान 10 होगा।

मूल्य आधारित प्रश्न

प्राप्त वेतन (% में)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	माध्य बिन्दु (x_i)	प्राप्त वेतन में (% में कमी)	c.f.
50-60	18	55	45	18
60-70	12	65	35	30
70-80	16	75	25	46
80-90	4	85	15	50

- (b) 20% से अधिक की कमी वाले लोगों की संख्या = $16+12+18 = 46$
- (a) वेतन में अधिकतम 40% की कमी वाले लोगों की संख्या = $12+16+4 = 32$
- (a) यहाँ, अधिकतम वर्ग बारम्बारता 18 है तथा इस बारम्बारता का संगत वर्ग 50-60 है।
अतः बहुलक वर्ग 50-60 होगा।
- (b) कर्मचारियों की संख्या $N = 18+12+16+4 = 50$

$$\therefore \frac{N}{2} = 25$$

25 संचयी बारम्बारता 30 के अंतर्गत आती है, जो वर्ग 60-70 में स्थित है।
जो दिये गये आँकड़ों का माध्यिका वर्ग है।
- (a) माध्य, माध्यिका और बहुलक के बीच सम्बंध :
 बहुलक = 3 माध्यिका - 2 माध्य
 अतः 3 माध्यिका = बहुलक + 2 माध्य

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

- (b) यदि (200-209) वर्ग की ऊपरी सीमा 209 है तथा इसके बाद के वर्ग (210-219) की निचली सीमा 210 है।
तब, $210 - 209 = 1$
अतः अन्तर 1 होगा।

2. (b)

प्रतिदिन तय दूरी (किमी में)	बसों की संख्या (f_i)	c.f.
200-209	4	4
210-219	14	18
220-229	26	44
230-239	10	54
240-249	6	60

यहाँ, बसों की संख्या $n = 60$

$$\therefore \frac{N}{2} = 30$$

30 संचयी बारम्बारता 44 के अन्तर्गत आती है, जो वर्ग 220–229 में स्थित है।
अतः आँकड़ों का माध्यिका वर्ग 220–229 होगा।

3. (b) हमें ज्ञात है, माध्यिका वर्ग 220–229 है, तब इससे पहले वाली कक्षा की संचयी बारम्बारता 18 होगी।

4. (b) बसों की संख्या $N = 60$

$$\therefore \frac{N}{2} = 30$$

30, संचयी बारम्बारता 44 के अन्तर्गत आती है, जो वर्ग 220–229 में स्थित है।
अतः 220–229 माध्यिका वर्ग है।

तब, निम्न सीमा (l) = 220, $f = 26$, $c.f. = 18$

वर्ग चौड़ाई (h) = $229 - 200 = 9$

$$\begin{aligned}\text{माध्यिका} &= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - c.f.\right)}{f} \times h \\ &= 220 + \left(\frac{30 - 18}{26}\right) \times 9 \\ &= 220 + \frac{12 \times 9}{26} \\ &= 220 + \frac{108}{26} = 220 + 4.15 \\ &= 224.15 = 225 \text{ किमी}\end{aligned}$$

अतः तय की गयी दूरी की माध्यिका 225 किमी होगी।

5. दिया है—

तय की दूरी का बहुलक = 223.78

तथा हमें ज्ञात है, माध्यिका = 225

$$\begin{aligned}\text{तब तय की दूरी का माध्य} &= \text{बहुलक} + \frac{3}{2} (\text{माध्यिका} - \text{बहुलक}) \\ &= 223.78 + \frac{3}{2} \times (225 - 223.78) \\ &= 223.78 + \frac{3}{2} \times 1.22 \\ &= 223.78 + 1.83 \\ &= 225.61 = 225\end{aligned}$$



प्रश्नावली 14 A

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. (i) घटना E की प्रायिकता + घटना ' E नहीं' की प्रायिकता = 1 है।
 (ii) उस घटना की प्रायिकता, जो घटित नहीं हो सकती 0 है। ऐसी घटना असम्भव घटना कहलाती है।
 (iii) उस घटना की प्रायिकता, जिसका घटित होना निश्चित है 1 है। ऐसी घटना निश्चित घटना कहलाती है।
 (iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 है।
 (v) किसी घटना की प्रायिकता 0 से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा 1 से छोटी या उसके बराबर होती है।
2. (i) इस प्रयोग में, "एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलती है अथवा नहीं चलती है", हम इसे उचित नहीं मान सकते हैं, कि प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना समान होगी। अतः इस प्रयोग का परिणाम समसंभावी नहीं है।
 (ii) इस प्रयोग में, "एक खिलाड़ी बास्केट बॉल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है", हम इसे उचित नहीं माना सकते हैं, कि प्रत्येक परिणाम घटित घटना के अनुरूप ही घटित होगा। अतः इस प्रयोग का परिणाम समसंभावी नहीं है।
 (iii) इस प्रयोग में, "एक सत्य-असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत", हम पहले ही जानते हैं कि परिणाम दो में से एक आना है—या तो सही या गलत। हम तर्कपूर्ण ढंग से मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम, सही या गलत, अन्य की तरह घटना संभावित है। अतः, परिणाम सही या गलत समसंभावी है।
 (iv) इस प्रयोग में, "एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या लड़की है।" हम पहले ही जानते हैं कि परिणाम दो में से एक आना है—या तो लड़का या लड़की। हम मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम, लड़का या लड़की, अन्य की तरह घटना संभावित है। अतः परिणाम लड़का या लड़की, समसंभावी है।
3. दिया है, दो मित्रों का जन्म सन् 2000 में हुआ।
 $\therefore \frac{2000}{4} = 500$ (सम्पूर्ण विभाज्य)
 $\therefore$ सन् 2000 एक लीप वर्ष था तथा लीप में दिनों की संख्या = 366
 $\therefore$ कुल परिणामों की संख्या = 366 दिन
 तथा अनुकूल परिमाणों की संख्या = 1 दिन
 $\therefore$ प्रायिकता $(P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}$

अतः दोनों मित्रों के जन्मदिन एक ही होने की प्रायिकता $\frac{1}{366}$ है।

4. पासे में कुल परिणामों की संख्या = 6

तथा 3 से छोटे अंक = 1, 2 $\rightarrow$ (2)

तब, अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

अतः पासे की एक बार फेंकने पर 3 से छोटी अंक प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।

5. पासे में कुल परिणामों की संख्या = 6

तथा पासे में 3 से बड़ी संख्याएँ = 4, 5, 6 $\rightarrow$ (3)

तब, अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अतः पासे को एक बार फेंकने पर 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

6. दिया है, 400 अंडों की एक ढेरी में से एक खराब अंडा चुनने की प्रायिकता 0.035 है।

माना, ढेरी में खराब अंडों की संख्या = x

तब, अनुकूल परिणामों की संख्या = x

तथा कुल परिणामों की संख्या = 400

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}}$$

$$0.035 = \frac{x}{400}$$

$$\frac{35}{1000} \times 400 = x$$

$$7 \times 2 = x$$

$$\therefore x = 14$$

अतः ढेरी में कुल खराब अंडों की संख्या 14 है।

7. दिया है, रहीम दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालता है।

$\therefore$ संभावित परिणाम = HH, HT, TH, TT

तब, कुल परिणामों की संख्या = 4

तथा कम-से-कम एक पट आने के परिणाम = HT, TH, TT

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{4}$$

अतः कम-से-कम एक पट आने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है।

8. ताश की गड्डी में पत्तों की संख्या = 52

तथा तस्वीर वाले काले पत्तों की संख्या = $3 \times 2 = 6$

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

तथा कुल परिणामों की संख्या = 52

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

अतः ताश की गड्डी से एक काला तस्वीर वाला पत्ता आने की प्रायिकता $\frac{3}{26}$ है।

9. दिए गए कार्डों पर कुल अंकित संख्याएँ हैं = 3, 4, 5, 6, ... 50

संख्या 3 से लेकर 50 के बीच पूर्ण वर्ग संख्याएँ = 4, 9, 16, 25, 36 व 49

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

तथा कुल परिणामों की संख्या = $50 - 2 = 48$

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

अतः निकाले गए कार्ड पर एक पूर्ण वर्ग संख्या आने की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ है।

10. थैले में लाल गेंदों की संख्या = 5

काली गेंदों की संख्या = 3

तथा सफेद गेंदों की संख्या = 4

∴ कुल गेंदों की संख्या = $5 + 3 + 4 = 12$

$$\begin{aligned} \text{अब, एक काली गेंद निकालने की प्रायिकता } (P) &= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} \\ &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{अतः गेंद के काली न होने की प्रायिकता} = 1 - (P) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}$$

11. ताश की गड्डी में पत्तों की कुल संख्या = 52

तथा गड्डी में लाल बादशाहों की संख्या = 2

∴ निकाले गए पत्ते के लाल बादशाह होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

अतः निकाले गए पत्ते के लाल बादशाह न होने की प्रायिकता

$$\begin{aligned} &= 1 - (P) \\ &= 1 - \frac{1}{26} = \frac{26-1}{26} \Rightarrow \frac{25}{26} \end{aligned}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. प्रयुक्त सूत्र—

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

जहाँ, $n(E)$ = अनुकूल परिणामों की संख्या

$n(S)$ = परिणामों की कुल संख्या

गणना—हम जानते हैं कि दो पासों को एक साथ फेंकने पर,

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

माना E = योगफल 7 आने की घटना

$$\Rightarrow \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ योगफल 7 आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

2. (i) दो सिक्के उछालने पर आने वाले कुल परिणाम = 4

HH, HT, TH, TT

वे परिणाम जिनमें एक पर प्राप्त होता है।

एक पट प्राप्त होने की = 2

प्रायिकता = $P(A)$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(ii) कुल सम्भावनाएँ = 4

अनुकूल सम्भावनाएँ = 2

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल सम्भावनाएँ}}{\text{कुल सम्भावनाएँ}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$

$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$

$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$

$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$n(E) = 11$$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{11}{36}$$

4. कुल पत्ते = 52

हुकम का बादशाह बेगम तक गुलाम निकलकर शेष बचे पत्ते = $52 - 3 = 49$

हुकम के पत्ते = 10

(i) एक पत्ता निकाले जो हुकम का हो की प्रायिकता = $\frac{10}{49}$

(ii) एक पत्ता निकाले जो बादशाह हो = $\frac{3}{49}$

5. दिया है, एक बक्से में कुछ कार्ड रखे हैं, तथा उनमें में एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है।

कार्डों पर अंकित संख्याएँ हैं = 3, 5, 7, 9 ... 37 तथा, 3 से लेकर 37 तक

अभाज्य संख्याएँ = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 11

तथा कुल परिणामों की संख्या = $\frac{37-2+1}{2} = \frac{36}{2} = 18$

∴ एक अभाज्य संख्या वाले कार्ड की प्रायिकता (P) = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{11}{18}$

अतः निकाले गए कार्ड पर एक अभाज्य संख्या अंकित होने की प्रायिकता $\frac{11}{18}$ है।

6. दिया है, दो पारसों को एक साथ उछाल गया।

∴ कुल परिणामों की संख्या = $6 \times 6 = 36$

तथा दोनों पासों पर एक संख्या आने के परिणाम

= (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

अब, प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

अतः दोनों पासों पर एक ही संख्या आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

7. दिया है, दो पासों को एक साथ उछाला गया।

∴ कुल परिणामों की संख्या = 36

तथा दोनों पासों पर एक संख्या आने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

∴ दोनों पासों पर एक ही संख्या आने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

अतः दोनों पासों पर विभिन्न संख्याएँ प्राप्त करने की प्रायिकता = $1 - (P) = 1 - \frac{1}{6}$

$$= \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

8. ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

∴ ताश की गड्डी में से ईट के बादशाह, बेगम और गुलाम निकालने पर शेष पत्तों की संख्या = $52 - 3 = 49$

(i) शेष पत्तों में ईट के पत्तों की संख्या = $13 - 3 = 10$

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 10

तथा कुल परिणामों की संख्या = 49

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{10}{49}$$

अतः निकाले गए पत्ते की एक ईट का पत्ता होने की प्रायिकता $\frac{10}{49}$ है।

(ii) शेष पत्तों में गुलाम के पत्तों की संख्या = 3

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

तथा कुल परिणामों की संख्या = 49

$$\therefore \text{प्रायिकता } (P) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{49}$$

अतः निकाले गए पत्ते की एक गुलाम होने की प्रायिकता $\frac{3}{49}$ है।

9. दिया है, दो भिन्न-भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया।

∴ कुल परिणामों की संख्या = $6 \times 6 = 36$

(i) दोनों पासों पर सम संख्या आने के कुल परिणाम

= (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)

$$\therefore \text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

अतः दोनों पासों पर सम संख्याएँ आने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है।

(ii) दोनों पासों पर आई संख्याओं का योग 5 होने के लिए परिणाम

= (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

$$\therefore \text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

अतः दोनों पासों पर आई संख्याओं का योगफल 5 होने की प्रायिकता $\frac{1}{9}$ है।

10. 1, 2, 3, 4, 35 से चुनी गई संख्या 7 का गुणज है।

$$= \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, ताश की 52 पत्तों की एक गड्डी में से 2 लाल रंग के इक्के तथा 2 लाल रंग की बेगम निकाल दी गई।

∴ गड्डी में बचे शेष पत्तों की संख्या = $52 - 4 = 48$

(i) गड्ढी में शेष बचे लाल रंग के पत्तों की संख्या $= 13 \times 2 - 4 = 26 - 4 = 22$

$$\therefore \text{एक लाल रंग के पत्ते होने की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} \\ = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$$

(ii) गड्ढी में बचे चिड़ी के पत्तों की संख्या $= 13$

$$\therefore \text{एक चिड़ी के पत्ते होने की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{13}{48}$$

(iii) शेष गड्ढी में काले रंग की बेगम के पत्तों की संख्या $= 2$

$$\therefore \text{एक काले रंग की बेगम} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

(iv) गड्ढी में शेष बचे काले रंग के इक्कों की संख्या $= 2$

तथा काले रंग के बादशाहों की संख्या $= 2$

$$\therefore \text{अनुकूल परिणामों की संख्या} = 2 + 2 = 4$$

अब, एक काले रंग को इक्का या काले रंग का बादशाह होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

2. दिया है, दो पासे एक स्लेटी और एक नीले को एक साथ उछाला जाता है।

तब, कुल संभावित परिणाम $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \text{ व } (6, 6)\}$

दोनों पासों पर आई संख्याओं का योगफल 6 होने के परिणाम

$$= \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$\therefore \text{तायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{5}{36}$$

अतः दोनों पासों के ऊपर आई संख्याओं का योग 6 होने की प्रायिकता $\frac{5}{36}$ है।

3. एक सिक्के को दो बार उछाले जाने पर कुल सम्भावित परिणाम

$$= \{HH, HT, TH, TT\}$$

(i) एक से अधिक चित्त आने के परिणाम $= 1 \text{ (HH)}$

$$\therefore \text{एक से अधिक चित्त आने की प्रायिकता (P)} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{4}$$

अतः एक से अधिक चित्त न आने की प्रायिकता $= 1 - (P)$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

(ii) कम से कम एक चित्त आने के परिणाम = $\{(HT), (TH), (HH)\} \Rightarrow 3$

$$\therefore \text{कम से कम एक चित्त आने की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{4}$$

(iii) दोनों बार चित्त या दोनों बार पट आने के लिए अनुकूल परिणाम

$$= \{(HH), (TT)\} \Rightarrow 2$$

$\therefore$ दोनों बार चित्त या दोनों बार पट आने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. दिया है, एक वृत्ताकार बोर्ड 8 समान भागों में विभाजित है—

जिन पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, ... 8 संख्याएँ अंकित हैं।

तथा बोर्ड के केन्द्र पर एक तीर को घुमाया जाता है,

जो किसी न किसी संख्या पर आकर रुकता है।

$\therefore$ कुल संभावित परिणामों की संख्या = 8

(i) 1 से 8 तक की विषय संख्याएँ = 1, 3, 5 व 7

$\therefore$ किसी विषय संख्या पर तीर के रुकने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ii) 3 से बड़ी संख्याएँ = 4, 5, 6, 7 व 8

$\therefore$ 3 से बड़ी संख्या पर तीर के रुकने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{5}{8}$$

(iii) 9 से छोटी संख्याएँ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 व 8

$\therefore$ 9 से छोटी संख्या पर तीर के रुकने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{8}{8} = 1$$

(iv) 1 से लेकर 8 तक अभाज्य संख्याएँ = 2, 3, 5 व 7

$\therefore$ किसी अभाज्य संख्या पर तीर के रुकने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

5. दिया है, एक पिग्गी बैंक में—

50 पैसे के सिक्के = 100

₹ 1 के सिक्के = 70

₹ 2 के सिक्के = 50

व ₹ 5 के सिक्के = 30

$\therefore$ पिग्गी बैंक में कुल सिक्कों की संख्या = $100 + 70 + 50 + 30 \Rightarrow 250$

- (i) यदि पिग्गी बैंक को उल्टा करके ₹ 1 का एक सिक्का गिरता है,
तब, ₹ 1 के सिक्के की गिरने की प्रायिकता

$$(P) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{70}{250} = \frac{7}{25}$$

- (ii) यदि पिग्गी बैंक को उल्टा करके गिरने वाला सिक्का ₹ 5 का हो,
तब, ₹ 5 के सिक्के की गिरने की प्रायिकता

$$(P) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{30}{250} = \frac{3}{25}$$

- (iii) यदि मिग्गी बैंक को उल्टा करके गिरने वाला सिक्का 50 पैसे या ₹ 2 का हो,
तब, 50 पैसे या ₹ 2 के सिक्के की गिरने की प्रायिकता

$$(P) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{100 + 50}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$$

6. माना नीली गेंदों की संख्या = x

तब कुल गेंद = $5 + x$

$$\text{लाल गेंद की प्रायिकता} = \frac{5}{5+x}$$

$$\text{नीली गेंद की प्रायिकता} = \frac{x}{5+x}$$

$$\text{प्रश्नानुसार } \left(\frac{x}{5+x} \right) = 2 \left(\frac{5}{5+x} \right)$$

$$x = 10$$

अतः नीली गेंदों की संख्या = 10

7. पेटी में कुल गेंद = 12

$$\text{काली गेंद} = x$$

$$\text{काली गेंद के निकलने की प्रायिकता} = \frac{x}{12}$$

$$6 \text{ काली गेंद और डाल दे} = 12 + 6 = 18 \text{ गेंद}$$

$$\frac{2 \times x}{12} = \frac{x+6}{18}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{x+6}{3}$$

$$x = \frac{x+6}{3}$$

$$7x = x+6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

8. जार में कुल कंचों की संख्या = 24

माना हरे कंचों की संख्या = x

नील कंचों की संख्या = $24 - x$

हरे कंचे की प्रायिकता = $\frac{x}{24}$

प्रश्नानुसार हरे कंचे की प्रायिकता = $\frac{2}{3}$

$$\frac{x}{24} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} \times 24$$

$$x = 16$$

हरे कंचों की संख्या = 16

तब नीले कंचों की संख्या = $24 - x$

$$= 24 - 16 = 8$$

9. दिया है, जार में कुल कंचे = 54

माना जार में नीले कंचों की संख्या = x

तब नीले कंचों की प्रायिकता = $\frac{x}{54}$

प्रश्नानुसार, $\frac{x}{54} = \frac{1}{3}$

$$x = \frac{54}{3}$$

$$x = 18$$

नीले कंचों की संख्या = 18

माना हरे कंचों की संख्या = y

तब हरे कंचे की प्रायिकता = $\frac{y}{54}$

प्रश्नानुसार, $\frac{y}{54} = \frac{4}{9}$

$$y = \frac{4}{9} \times 54$$

$$y = 4 \times 6 = 24$$

जार में सफेद कंचे = कुल कंचे - (नीले कंचे + हरे कंचे) सफेद कंचे

$$= 54 - (18 + 24)$$

$$54 - 42$$

सफेद कंचे = 12

10. थैले में गेंद = 24

जिनमें लाल गेंदों की संख्या = x

सफेद गेंदों की संख्या = $2x$

तथा नीली गेंदों की संख्या = $3x$

कुल गेंद = लाल गेंद + सफेद गेंद + नीली गेंद

$$24 = x + 2x + 3x$$

$$24 = 6x$$

$$x = \frac{24}{6}$$

$$x = 4$$

लाल गेंद = 4

सफेद गेंदें = $2 \times 4 = 8$

नीली गेंदें = $3 \times 4 = 12$

(i) लाल नहीं होने की प्रायिकता

$$\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

(ii) सफेद होने की प्रायिकता

$$\frac{\text{सफेद गेंद}}{\text{कुल गेंद}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

विविध प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. (b) 2. (c) 3. (c) 4. (a) 5. (a) 6. (a) 7. (d) 8. (a)
9. (d) 10. (a)

अभिकथन-कारण आधारित प्रश्न

1. (b) 2. (a) 3. (d) 4. (c)

चित्र आधारित प्रश्न

1. हम जानते हैं—

किसी घटना ' E ' के घटने की प्रायिकता = $\frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$

चित्र से—सभी संभव परिणामों की कुल संख्या 10 है।

व्हील घुमाने पर, 100% छूट मिलने की प्रायिकता

$$\begin{aligned} &= \frac{100\% \text{ छूट के अनुकूल परिणाम}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

2. कोई पुरस्कार न मिलने की प्रायिकता = $\frac{\text{कोई पुरस्कार न मिलने के अनुकूल परिणाम}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}}$
 $= \frac{3}{10}$
3. शोकर बॉल जीतने की प्रायिकता = $\frac{\text{शोकर बॉल जीतने के अनुकूल परिणाम}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}}$
 $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
4. 15% छूट जीतने की प्रायिकता = $\frac{15\% \text{ छूट जीतने के अनुकूल परिणाम}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}}$
 $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
5. फ्री स्पीन मिलने की प्रायिकता = $\frac{\text{फ्री स्पीन मिलने के अनुकूल परिणाम}}{\text{सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}}$
 $= \frac{1}{10}$

कूट आधारित प्रश्न

1. (ii) 2. (iii)

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (d) 2. (b) 3. (c) 4. (a)

सुमेलन आधारित प्रश्न

(ii)

कौन-सा कथन सही नहीं है

(ii)

सत्य/असत्य कथन आधारित प्रश्न

1. सत्य 2. असत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. असत्य

उच्च स्तरीय विचारात्मक प्रश्न

1. हम जानते हैं—

प्रथम 200 धन पूर्णांक हैं—1, 2, 3, 4, 5, 200

पूर्णांक जो 6 से विभाज्य हैं,

6, 12, 18, 198

तब, प्रथम धन 200 पूर्णांकों में 6 से विभाज्य होने वाले पूर्णांकों की संख्या $6n = 198$

$n = 33$ होंगे।

1 से 200 धन पूर्णांकों के बीच 33 धन पूर्णांक ऐसे हैं, जो 6 से विभाज्य हैं।

अब, 8 से विभाज्य धन पूर्णांकों, 1 से 200 धन पूर्णांकों के मध्य है, 8, 16, 24,
200

$$\Rightarrow 8n = 200 \Rightarrow n = 25$$

1 से 200, धन पूर्णांकों के मध्य 9 से विभाजित होने वाले धन पूर्णांकों की संख्या 25 है।

अब 1 से 200 के बीच ऐसे धन पूर्णांक जो 6 व 8 दोनों से विभाजित है, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192 इनकी कुल संख्या 8 है।

तब 1 से 200 के बीच ऐसे धन पूर्णांक जो पूर्णांक 6 या 8 से विभाज्य है
 $= 33 + 25 - 8 = 50$

अतः 1 से 200 के बीच चुना गया पूर्णांक 6 या 8 से विभाज्य हो

$$= \frac{\text{संभावित परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

2. कुल गेंदों की संख्या = 12

काली गेंदों की संख्या = x

$$P(\text{काली गेंद}) = \frac{x}{12}$$

पेटी में 6 काली गेंदे और डाल देने पर, कुल गेंदों की संख्या = $12 + 6 = 18$

कुल काली गेंदों की संख्या = $x + 6$

$$P(\text{काली गेंद}) = \frac{x+6}{18}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{x+6}{18} = 2 \left(\frac{x}{12} \right)$$

$$\Rightarrow 3x = x + 6$$

$$\Rightarrow 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = 3$$

अतः x का मान 3 होगा।

3. चित्र से—

$\triangle ABC$ में, $\angle D = 90^\circ$

तब पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

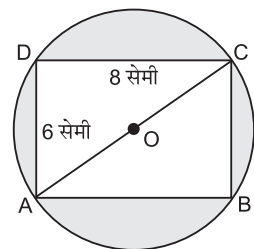
$$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$AC = \sqrt{100} \Rightarrow AC = 10 \text{ सेमी}$$

यहाँ, $AC = 10$ सेमी वृत्त का व्यास होगा।

$$\text{तब वृत्त की त्रिज्या } (r) = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$



$$\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi(5)^2 = 25\pi \text{ सेमी}^2$$

$$\text{तथा, आयतन का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = 8 \times 6 = 48 \text{ सेमी}^2$$

$$\begin{aligned} \text{तब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{आयत का क्षेत्रफल} \\ &= (25\pi - 48) \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

$$\text{अब, पासा गिरने का अनुकूल क्षेत्र} = (25\pi - 48) \text{ सेमी}^2$$

$$\text{तथा कुल क्षेत्र} = 25\pi$$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग में पासा गिराने की प्रायिकता} &= \frac{\text{पासा गिरने के लिए अनुकूल क्षेत्र}}{\text{कुल क्षेत्र}} \\ &= \frac{(25\pi - 48)}{25\pi} \end{aligned}$$

$$\text{अतः छायांकित भाग में पासा गिरने की प्रायिकता} = \frac{25\pi - 48}{25\pi} \text{ होगी।}$$

मूल्य आधारित प्रश्न

1. (a) ताश की गड्डी में कुल कार्डों की संख्या = 52

$$\text{इसमें, काले रंग के कार्डों की संख्या} = 26$$

$$\text{तथा लाल रंग के कार्डों की संख्या} = 26$$

कुल 12 फेस कार्ड होते हैं, जिनमें 6 काले व 6 लाल होते हैं। फेस कार्डों में राजा, रानी व गुलाम होते हैं।

निकाला गया कार्ड लाल रंग का राजा होने की प्रायिकता

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{लाल रंग वाले राजा के कार्ड की संख्या}}{\text{कुल कार्डों की संख्या}} \\ &= \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \end{aligned}$$

2. (d) फेस कार्ड होने की प्रायिकता = $\frac{\text{फेस कार्ड की संख्या}}{\text{कुल कार्डों की संख्या}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

3. (b) पान का जैक (गुलाम) होने की प्रायिकता = $\frac{\text{पान के जैक की संख्या}}{\text{कुल कार्डों की संख्या}} = \frac{1}{52}$

4. (a) लाल रंग का फेस कार्ड होने की प्रायिकता = $\frac{\text{लाल रंग के फेस कार्ड की संख्या}}{\text{कुल कार्डों की संख्या}}$

$$= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

5. (d) हुकुम के कार्ड होने की प्रायिकता = $\frac{\text{हुकुम के कार्डों की संख्या}}{\text{कार्डों की कुल संख्या}}$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

केस स्टडी (केस/स्रोत आधारित प्रश्न)

1. (b) पासों को ऊपर संख्याओं का योग

8 आने के तरीके = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

कुल संभावित परिणाम = $6 \times 6 = 36$

$$\begin{aligned}\text{अतः योग 8 आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{योग 8 के लिए अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}} \\ &= \frac{5}{36}\end{aligned}$$

2. (d) पासों के ऊपर संख्याओं का योग 13 होने के तरीके = 0

कुल संभावित परिणाम = 36

$$\begin{aligned}\text{योग 13 आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{योग 13 के लिए अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} \\ &= \frac{0}{36} = 0\end{aligned}$$

3. (a) योग 12 से 12 से कम आने के तरीके = 36

कुल संभावित परिणाम = 36

$$\begin{aligned}\text{योग 12 या 12 से कम आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{योग 12 या 12 से कम के लिए अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} \\ &= \frac{36}{36} = 1\end{aligned}$$

4. (c) योग 7 होने के तरीके = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

कुल संभावित परिणाम = 36

$$\begin{aligned}\text{योग 7 आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{योग 7 के लिए अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} \\ &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

5. (d) योग 8 से अधिक होने के तरीके = (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

कुल संभावित परिणाम = 36

$$\begin{aligned}\text{योग 8 से अधिक आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{योग 8 से अधिक के लिए अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} \\ &= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}\end{aligned}$$



Notes

[illegible]

Notes

[illegible]

Notes

[illegible]